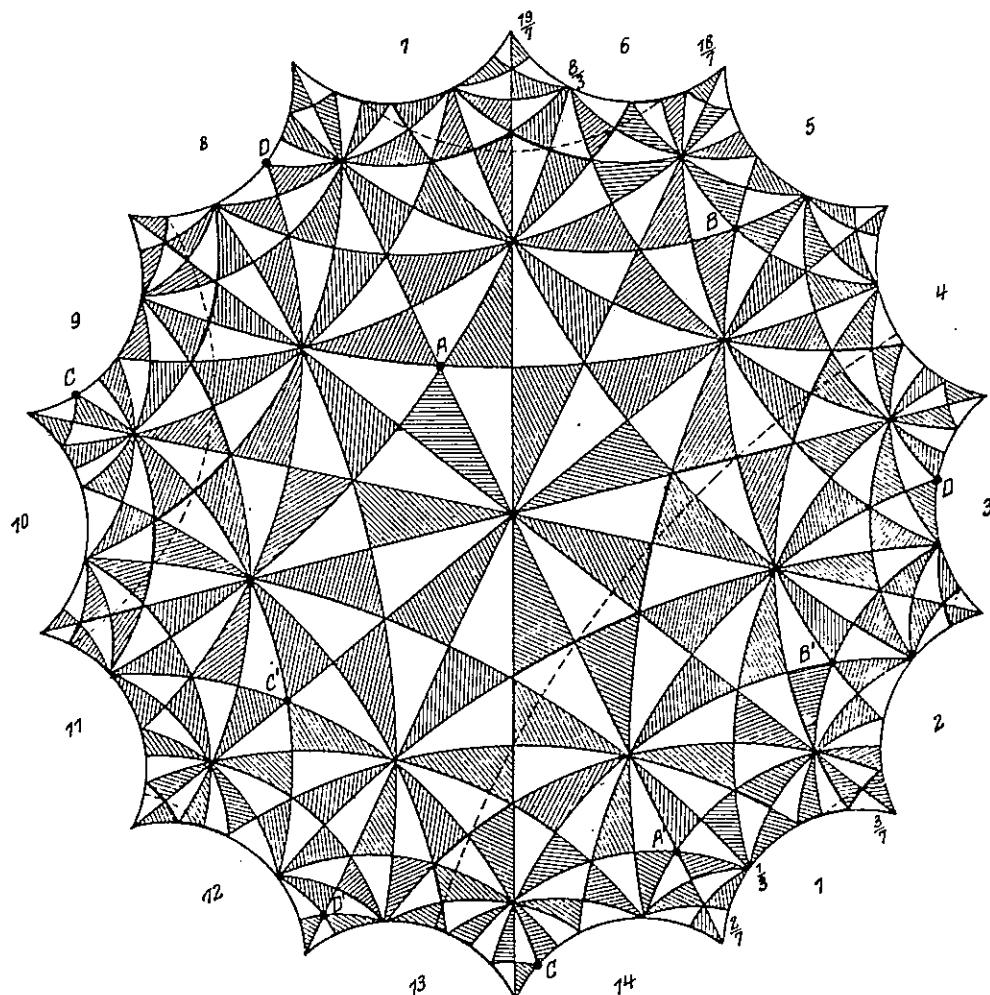


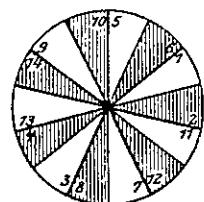
Representaties, Simplele singulariteiten  
 en verder ....  
 ( voorlopige versie )



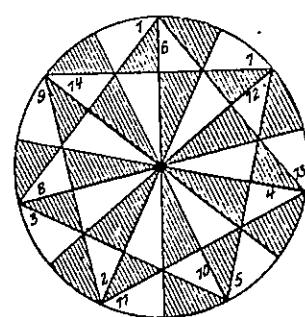
Hauptfigur.

Zusammengehörigkeit  
 der Kanten:

- 1 an 6
- 3 " 8
- 5 " 10
- 7 " 12
- 9 " 14
- 11 " 2
- 13 " 4



Ecken der einen Art.



Ecken der anderen Art.

## Inhoudsopgave.

I .	Singulairiteiten van driehoeks type	
§1.	Fundamentaal groep	1
§2.	Voorbeelden	2
§3.	Driehoeksgroepen.	3
§4.	Simple singulairiteiten en driehoekssingulairiteiten.	8
§5.	Slotopmerkingen.	11.
II .	De Correspondentie van Mc Kay.	13
§1.	Representatie grafen.	14
§2.	De Stelling van Gonzales-Sprinberg en Verdier.	32
§3.	De constructie van H. Knörrer.	35
III .	De kromme van Klein.	50
§1.	Normale quasi-homogene oppervlakken	50
§2.	Modulaire krommen.	59
§3.	Theta-karakteristieken.	55
§4.	Irreducibele karakters van $SL_2(\mathbb{P})$	59
§5.	De meetkunde van $PSL_2(7)$	62
§6.	Poincaré reeksen.	69
§7.	Slot opmerkingen.	77.

## I. Singulariteiten van driehoeks type.

In dit hoofdstuk gaan we kort in op de bekende feiten die samenhangen met een speciale klasse van normale quasihomogene oppervlakte singulariteiten: de simple singulariteiten en de andere singulariteiten van driehoeks type.

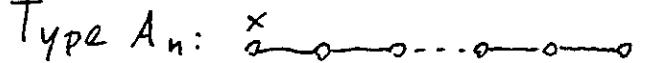
§ 1. Laat  $(\tilde{X}, E) \xrightarrow{\pi} (X, o)$  een goede resolutie van een normale oppervlakte singulariteit  $(X, o)$ . Hierin is  $E := \pi^{-1}(o)$  red de exceptionele divisor. We schrijven  $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$  met  $E_i$  glad en irreducibel;  $\text{Irr}(E) = \{E_i\}$  de verzameling van irreducibele componenten. De intersectiematrix  $C = C_{ij} = (E_i \cdot E_j)$  is negatief definit ([1]) en  $C_{ii} < 0$ ;  $C_{ij} = 0$  of  $1$ ,  $i \neq j$ . De resolutiegraaf (of diagram) is de graaf met  $\{\text{punten}\} = \text{Irr}(E)$  en  $E_i$  verbonden met  $E_j$  steeds als  $C_{ij} = 1$ ,  $i \neq j$ . Het getal  $E_i \cdot E_i$  wordt boven het punt  $E_i$  gezet;  $-2$  wordt neergeleten. Omdat  $E$  samenhangend is, is de resolutiegraaf dat ook.  
 Laat  $K$  de link of omgevingsrand van  $(X, o)$  zijn.  
 De volgende bewering gaat terug op Mumford [1]:  
bewering: Stel dat de resolutiegraaf van  $(\tilde{X}, E) \xrightarrow{\pi} (X, o)$  boomvormig is, en alle  $E_i$  rationaal.  
 Een presentatie voor de fundamenteel groep  $\pi_1(K)$  is dan:  

$$\pi_1(K) = \langle S_i \mid i=1, \dots, n \mid \prod_i S_i^{c_{ij}} = 1; S_i S_j^{c_{ij}} = S_j^{c_{ij}} S_i \rangle.$$
  
bewijss: zie [1].

- Mark op dat dit onafhankelijk van de interpretatie als fundamenteel groep een interessante manier is om dan een (symmetrische) matrix een groep toe te voegen.
- In het bijzonder is de groep invariant onder 'opblazen'.

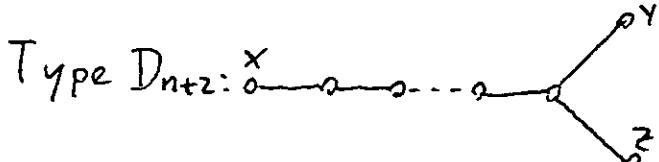
- §2. Stel nu dat  $C_{ii} = -2$ ;  $C_{ij} = 0$  of  $1$  if  $i \neq j$ . Het (samenhangend vooronderstelde) diagram van een negatief definitie matrix die hieraan voldoet is dan een Dynkin diagram van een irreducibel homogeen wortelsysteem. Hieronder geven we presentaties van de bij behorende groepen, waarbij we n.b.v. de Mumford relaties alles uitdrukken in de 'eindpunten' van het diagram.

Type  $A_n$ :



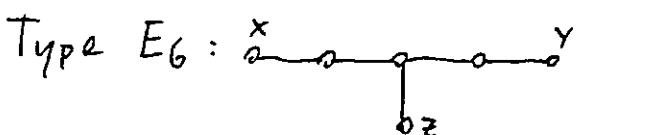
$$\pi_1 = \langle x \mid x^{n+1} = 1 \rangle$$

Type  $D_{n+2}$ :



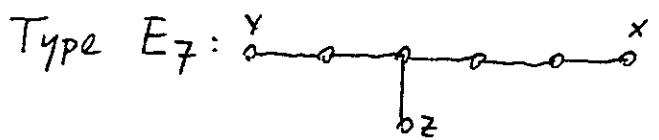
$$\pi_1 = \langle x, y, z \mid x^n = y^2 = z^2 = xyz \rangle$$

Type  $E_6$ :



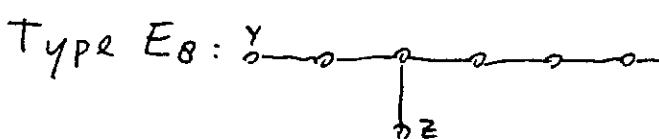
$$\pi_1 = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^2 = xyz \rangle$$

Type  $E_7$ :



$$\pi_1 = \langle x, y, z \mid x^4 = y^3 = z^2 = xyz \rangle$$

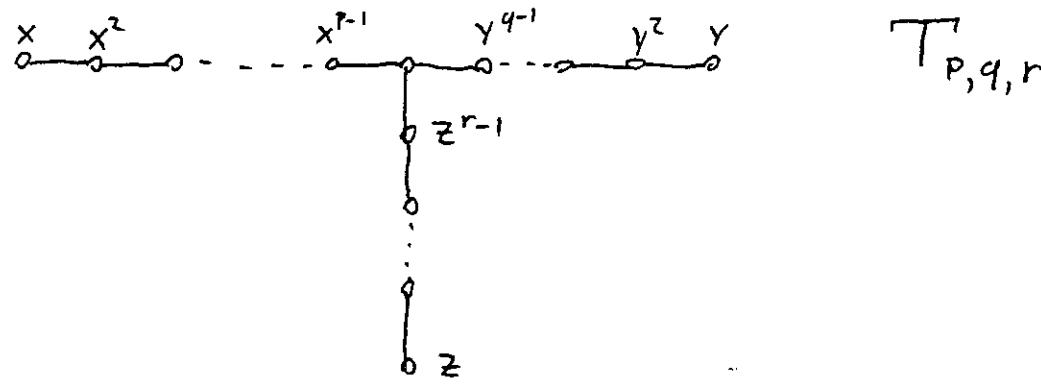
Type  $E_8$ :



$$\pi_1 = \langle x, y, z \mid x^5 = y^3 = z^2 = xyz \rangle$$

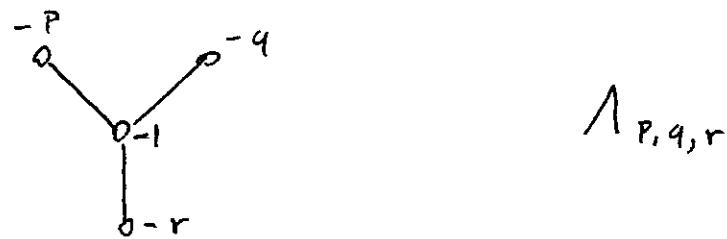
Algemeen krijgt men natuurlijk voor een ster-vormig diagram met drie armen ter lengte

$p \geq q \geq r \geq 2 :$



$$\pi_1 = \langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^r = xyz \rangle$$

Dezelfde groep krijgt men bij het diagram



De intersectiematrix is negatief definit als:

- voor  $T_{p,q,r} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$  (de Platonische triplets)
- voor  $A_{p,q,r} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$  (hyperbolische triplets).

§3. De classificatie van enkelvoudig samenhangende Riemann oppervlakken is wel bekend (zie [2]):

We hebben de volgende mogelijkheden:

- i) De Riemann sfeer  $\mathbb{P}' \cong S^2$ ;  $\text{Aut}(\mathbb{P}') = SO_3(\mathbb{R})$
- ii) Het Euclidische vlak  $E \cong \mathbb{C}$ ;  $\text{Aut}(E) = \mathbb{R}^2 \times SO_2(\mathbb{R})$
- iii) Het Lobatchevskivlak  $L = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ;  $\text{Aut}(L) = SU(1,1)$
- of het Poincaré halfvlak  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 1\}$ ;  $\text{Aut}(H) = PSL_2(\mathbb{R})$
- met  $\text{Aut}(P)$  de groep van complex analytische automorfismen van de corresponderende klassieke 'meetkunde's'.

- Voor elk drietal getallen  $\alpha, \beta, \gamma$ ;  $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$  is er een driehoek  $\Delta$  met hoeken  $\alpha, \beta, \gamma$  gelegen in een van deze 3 staten. Deze driehoek ligt in  $\mathbb{P}^1$ ,  $E$  of  $H$  als  $\alpha + \beta + \gamma - \pi > 0$ ;  $= 0$  of  $< 0$  resp. In het eerste en derde geval is een dergelijke driehoek uniek op automorfisme van  $P$  en een spiegeling, en heeft eindige opperlaagte = .

-----

- We beschouwen nu de groep  $\Sigma^*$  voortgebracht door spiegelingen in de zijden van  $\Delta$  en de ondergroep  $\Sigma$  van index  $2 \subset \text{Aut}(P)$  (de z.g. driehoeks groep). We beperken ons nu tot het geval  $\alpha = \pi/p$ ,  $\beta = \pi/q$ ,  $\gamma = \pi/r$   $p, q, r \in \{2, 3, \dots\}$  en we noemen  $\Sigma^* = \Sigma^*(p, q, r)$ ;  $\Sigma = \Sigma(p, q, r)$ ;  $\Delta = \Delta(p, q, r)$  etc.

Het volgende resultaat is klassiek:

Stelling: (Poincaré)

- i)  $\Delta$  is een fundamenteel gebied voor  $\Sigma^*$  (d.w.z  $\Delta \cap g\Delta \subset \partial\Delta$ ;  
 $\bigcup_{g \in \Sigma^*} g\Delta = P$ ).
  - ii)  $\Sigma^*$  heeft een presentatie van de vorm:
- $$\Sigma^*(p, q, r) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_i^2 = 1; (\sigma_1 \sigma_2)^p = (\sigma_2 \sigma_3)^q = (\sigma_3 \sigma_1)^r = 1 \rangle.$$
- iii)  $\Sigma$  heeft een presentatie van de vorm:
- $$\Sigma(p, q, r) = \langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^r = xyz = 1 \rangle$$

Hierin is  $\sigma_i$  spiegeling in de  $i$ -de zijde van  $\Delta$ ;  $i=1, 2, 3$ . De hoek tussen zijde 1 en 2 is  $\pi/p$  etc.

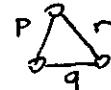
Verder:  $x = \sigma_1 \sigma_2$ ;  $y = \sigma_2 \sigma_3$ ;  $z = \sigma_3 \sigma_1$ .

Voor een voorzagig bewijs zie [2].

Een fundamenteel gebied voor  $\Sigma$  is bijvoorbeeld  $\Delta \cup \partial \Delta$ .

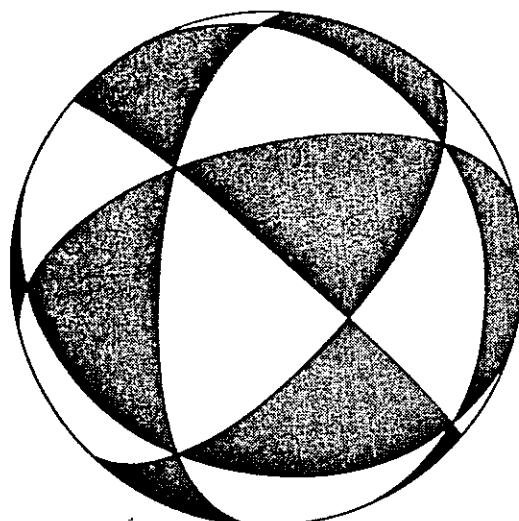
Gevolg:  $\Sigma^*(p, q, r)$  eindig  $\Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ .

Immers, slechts dan ligt  $\Delta(p, q, r)$  in  $P'$ . Het aantal elementen van  $\Sigma^*(p, q, r)$  is dan  $4 / (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1)$ , hetgeen direct uit vergelijking van oppervlakte van  $\Delta$  en  $P'$  volgt.

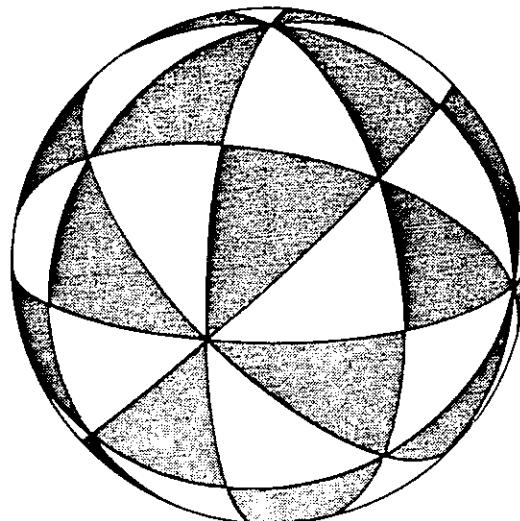
De groep  $\Sigma^*(p, q, r)$  is dus de Coxetergroep  , van compact hyperbolisch type indien  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$  (zie [3]).

De overdekking van  $P$  met driehoeken is een fraai gezicht.  
In het elliptische geval hebben we de volgende mogelijkheden:  
(zie [4])

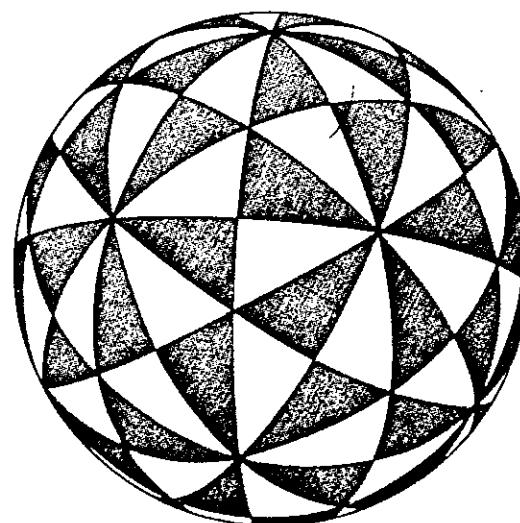
$$\#\Sigma^*(p, 2, 2) = 4p$$



$$\#\Sigma^*(3, 3, 2) = 24$$



■  $\#\Sigma^*(4,3,2) = 48$



■  $\#\Sigma^*(5,3,2) = 120$

In de laatste 3 gevallen is de groep  $\Sigma^*$  de symmetriegroep van een regelmatig veelvlak in  $\mathbb{R}^3$ . De corresponderende rotatiegroepen  $\Sigma$  noemen we de (ruivere) polyedergroepen.

In alle gevallen werkt  $\Sigma(p,q,r)$  wijn op  $P$ , buiten de hoekpunten van de driehoeken. De hollepunten vallen uit een in drie banen onder de groep. De stabilisator van een punt in zo'n speciale baan is een cyclische groep van orde  $p, q$  of  $r$ .

Het quotient  $P/\Sigma$  is  $\mathbb{P}^1$  en de canonieke projectie

$P \rightarrow P/\tilde{\Sigma} = \mathbb{P}^1$  vertaalt boven 3 punten, in de punten van de speciale banen.

Lemma: Laat  $\tilde{\text{Aut}}(P)$  de universele overdekking van  $\text{Aut}(P)$  en  $\tilde{\Sigma}$  het inverse beeld onder de canonieke projectie van  $\Sigma$ . We hebben dan:

i)  $1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\text{Aut}}(P) \rightarrow \text{Aut}(P) \rightarrow 1$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & \parallel & & \uparrow & & & \\ 1 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \Sigma & \longrightarrow & \tilde{\Sigma} \longrightarrow 1 \\ & & & & & & \end{array} \quad \text{exact.}$$

ii)  $\mathbb{Z}$ , het centrum, is  $\mathbb{Z}/2$  als  $P = \mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{Z}$  als  $P = E$  of  $H$ .

iii)  $\Sigma$  heeft een presentatie van de vorm:

$$\Sigma(P, q, r) = \langle x, y, z \mid x^P = y^q = z^r = xyz \rangle.$$

Het bewijs is niet moeilijk (zie [2]).

De groepen  $\Sigma(P, q, r)$  heten de uitgebreide driehoeksgroepen, in het elliptische geval ook wel binaire polyedergroepen.

Dus dan  $\Sigma \subset \text{SU}_2(\mathbb{C}) \cong S^3$ . Vanwege de cyclische groepen  $\mathbb{Z}/n$  via  $(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3^{-1} \end{smallmatrix})$   $z^n = 1$  in  $\text{SU}_2(\mathbb{C})$  dan verkrijgt men zo alle eindige ondergroepen van  $\text{SU}_2$  (zie [5]). Een eindige ondergroep van  $\text{SU}_2(\mathbb{C})$  noemen we een binaire groep.

Die 120 elementen van  $\Sigma(5, 3, 2)$  in  $S^3$  vormen de hoekpunten van de regelmatige 600-cell  $\{3, 3, 5\}$ , de 24 elementen van  $\Sigma(3, 3, 2)$  de hoekpunten van de 24-cell  $\{3, 4, 3\}$  en de 48 elementen van  $\Sigma(4, 3, 2)$  de hoekpunten van twee dubbele 24-cellen, ofwel de projectie van het wortelsysteem  $F_4$  in  $S^3$ . (zie [4]).

## §4. Simplele singulariteiten en driehoeksingulariteiten

De uitgebreide driehoeks groepen  $\Sigma = \pi_1(\widetilde{\text{Aut } P/\Sigma}) = \pi_1(\text{Aut } P/\Sigma)$

uit §3 zijn blijkbaar isomorf met de groepen die we in §2 bij de diagrammen  $T_{Pqr}$  en  $A_{Pqr}$  tegenkomen.

We zullen nu in het elliptische geval en het hyperbolische geval een singulariteit construeren met:

i) De minimale goede resolutie heeft een graaf van type  $T_{Pqr}$  of  $A_{Pqr}$

iii) De link  $k$  is diffeomorf met  $\text{Aut } P/\Sigma$ .

A. Elliptische geval ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ )

Laat  $L = \text{Tot}(\mathcal{O}(-2))$  de coraanbundel aan  $\mathbb{P}^1$ ;  $L^*$  het complement van de nulsnede en  $M := L^*/\mathbb{R}^+$  (evige  $\mathbb{R}^+$  actie op  $L^*$ , afkomstig van  $\mathbb{C}^*$ -actie op de verels van  $L$ ).

De groep  $\text{Aut}(\mathbb{P}')$  werkt op natuurlijke wijze op  $L$ ,  $L^*$  en  $M$ . De werking op  $L^*$  is vrij, op  $M$  vrij en transitief dus  $M \cong \text{Aut}(\mathbb{P}')$ . De groep  $\Sigma$  werkt vrij buiten de 3 speciale banen op  $\mathbb{P}'$  en het quotient  $QL = L/\Sigma$  is een oppervlak met 3 singulariteiten, van cyclische quotient type  $(p, p-1)$ ,  $(q, q-1)$ ,  $(r, r-1)$ . Minimale resolutie van deze singulariteiten levert een  $T_{p,q,r}$ -diagram; de centrale kromme correspondeert met de strikt getransformeerde van  $\mathbb{P}'/\Sigma = \mathbb{P}' \subset QL$ . Samen trekken van deze  $\mathbb{P}' \subset QL$  geeft een oppervlak  $X$  met geïsoleerd singulair punt  $o$ , met resolutiegraaf  $T_{p,q,r}$  en link  $k \cong X-o/\mathbb{R}^+ = (L^*/\Sigma)/\mathbb{R}^+ = M/\Sigma = \text{Aut } P'/\Sigma$ .

Laat nu  $\mathcal{C}$  een gladde projectieve kromme over  $\mathbb{C}$  en  $\mathcal{L}$  een lijnbundel op  $\mathcal{C}$  (= locaal vrij  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ -modul van rang 1).  
Een sectie  $s \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{L})$  is op te vatten als een functie  
op  $L = \text{Tot}(\mathcal{L}^\vee)$ , lineair in de verdel:

$$s \mapsto \tilde{s}: \text{Tot}(\mathcal{L}^\vee) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, t) \mapsto \langle s(x), t \rangle$$

Als  $\mathcal{L}$  ampel is, dan heeft  $\mathcal{L}$  negatieve zelfintersectie. De  
ruimte  $\mathcal{C}\mathcal{L}$  die ontstaat door het samen trekken van de  
verbrede heeft de structuur van affiene varieteit, ge-  
geven door  $\mathcal{C}\mathcal{L} = \text{Spec} \left( \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^0(\mathcal{C}, \mathcal{L}^k) \right)$

Hierboven hadden we  $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$ ;  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(2)$ . Onze singulari-  
teit krijgt nu de structuur van een normale affiene  
oppervlakte singulariteit  $\mathcal{C}\mathcal{L}/\tilde{\Sigma} = \text{Spec} \left( (\oplus H^0(\mathcal{O}(2))^{\tilde{\Sigma}}) \right)$ .

De actie van  $\tilde{\Sigma}$  op  $\mathcal{L}$  is te liften naar een actie van  
 $\tilde{\Sigma}$  op  $L' = \text{Tot}(\mathcal{O}(-1))$ . De ruimte  $\mathcal{C}L'$  is isomorf met  
 $\mathbb{C}^2$  en de singulariteit  $(X, o)$  verschijnt nu als het  
quotient  $\mathbb{C}^2/\tilde{\Sigma}$ , met affiene coördinatenring  $\mathbb{C}[z_1, z_2]^{\tilde{\Sigma}}$ .  
Een singulariteit van de vorm  $\mathbb{C}^2/G$  met  $G$  een  
binaire groep heet een simple singulariteit. De ring  
van  $G$ -invariante polynomen wordt voortgebracht door  
3 elementen, die  $\mathbb{C}^2/G$  als hyperoppervlak in  $\mathbb{C}^3$  inbedden.  
De resolutiegraaf van  $\mathbb{C}^2/G$  met  $G = \mathbb{Z}/n$  is het  
Dynkin diagram van type  $A_{n-1}$ . We zien nu dat de  
binaire groepen precies corresponderen met Dynkin

die diagrammen van type A, D of E. Voor de binaire groepen zijn de volgende notaties in use loop:

$$\Sigma(p, q, r) = \langle p, q, r \rangle ; \quad (\text{zie [43]}) \quad \text{en}$$

$$\mathbb{Z}/n, \quad \mathbb{D}_n = \Sigma(n, 2, 2); \quad \mathbb{T} = \Sigma(3, 3, 2); \quad \mathbb{O} = \Sigma(4, 3, 2); \quad \mathbb{I} = \Sigma(5, 3, 2)$$

(resp. cyclisch, binair dihedraal, tetra hedraal, octahedraal en binair icosa hedraal).

## B. Hyperbolische gevallen ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ ).

De constructie is bijna geheel analoog. Nu nemen we echter  $L =$  raakbundel aan  $H$ , met canonische  $\text{Aut}(H)$  actie. Door nu eerst een vrij vrake groep  $N$  van eindige index in  $\Sigma$  uit te delen krijgen we een gladde projectieve kromme  $\ell = H/N$  van algemeen type (d.i.  $\mathcal{R}^1\ell$  ampel, ofwel  $g(\ell) > 1$ ). Door nu de actie van  $G = \Sigma/N$  op  $L' = \text{Tot}(\mathcal{R}_{\ell}^{1-1}) = T\ell$  uit te delen krijgen we een oppervlakte met 3 singulaire punten, nu echter van type  $(p, p) (q, q) (r, r)$ . Minimale resolutie geeft nu een  $A_{p,q,r}$ -diagram. Door  $\ell/G = \mathbb{P}^1 \subset GL' = L'/G$  samen te trekken krijgen we een oppervlakte met geïsoleerd singulair punt o. met affiene coördinaten ring  $(\oplus H^0(\ell, \mathcal{R}_{\ell}^k))^G$ , ofwel de algebra van  $\Sigma$  automorfe vormen op  $H$ . (zie [6]).

De singulariteit heet de driehoekssingulariteit van type  $(p, q, r)$ .

Dere singulariteiten zijn i.h.a. vrij 'wild'; slechts voor 14 triplets krijgen we hyperoppervlakken (zie [6]) en voor  $p+q+r > 22$  zijn dere 'non-smoothable'. (zie [7]).

§ 5. Slot opmerkingen.

LI

Laat  $\ell$  een gladde projectieve kromme over  $\mathbb{C}$ ,  $L$  een ample lijnbundel op  $\ell$ , en  $G$  de groep van bundel-automorfismen. Zij  $L = \text{Tot}(\mathcal{L}^{-1})$ . Beschouw onderstaand diagram:

$$\begin{array}{ccccc} & \tilde{X} & & E_0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ L & \longrightarrow & QL & ; & \ell \longrightarrow \mathcal{E} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ CL & \longrightarrow & X & ; & \{Q_i\} \longrightarrow P_i \\ & & & & \downarrow \\ & & & & o \longrightarrow o \end{array}$$

Horizontale pijlen zijn 'uitdelen naar  $G$ '; verticale pijlen zijn contracties. (vgl. vorige §). De afbeelding  $\ell \rightarrow \ell/G = \mathcal{E}$  vertaalt boren  $P_i \in \mathcal{E}$  in punten  $Q_i$ ,  $i=1 \dots k$ , Galois, met groep  $G$ .  $X = \text{Spec}(\oplus H^0(\ell, \mathcal{L}^k)^G)$  heeft de structuur van een normale affiene oppervlakte singulariteit, met een 'goede  $\mathbb{C}^*$ -actie' (zie [8]). De minimaal goede resolutie van  $X$  heeft een sterformig diagram. De centrale kromme is de strikt getransformeerde van  $\ell$  in  $\tilde{X}$ . Voor elk punt  $P_i \in \mathcal{E}$  wijgen we een tak in het diagram door een zware cyclische quotient singulariteit op te lossen. De irreducibele componenten van  $E \neq E_0$  zijn  $P_i$ 's met zware zelfintersecties.

Stelling: (Pinkham, Dolgachev):

- i) Elke normale 2-dimensionale oppervlakte singulariteit met goede  $\mathbb{C}^*$ -actie is zo te verrijgen.
- ii) Gegeven de resolutie data (d.i.:

z. de (geabelde) resolutie vraag; B. het analytisch type van de centrale kromme  $E_0$ ; Z. de ligging van de punten  $P_i$

In S. de normaal schoof  $N$  van  $E_0$  in  $\tilde{x}$ ) dan is er een wieke quasihomogene normale oppervlakte singulariteit met deze resolutie data, gesteld dat de intersectiematrix negatief definit is.

bewijz: zie [6], [8] en [9].

Natuurlijk is de voorstelling als  $\text{Spec}(\oplus H^0(e, \mathcal{L}^k))^G)$  niet uniek. Zo is  $CL = \mathbb{C}^2/G$  met  $L = T \oplus (\mathcal{O}(n))$  en  $G \cong \mathbb{Z}/n$ , actie via  $(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix})^{3^n} = 1$ .

## II. De Correspondentie van McKay.

De opmerking van J. McKay [10] is onder meer het volgende:  
 Voor een binaire groep  $G \hookrightarrow \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$  is de matrix  
 $C = 2\mathbb{I} - A$  (met  $A$  de decompositie matrix van de  
 canonieke 2-dimensionale representatie  $\epsilon$  in  $\mathbb{C}^2$ ) gelijk  
 aan de Cartan-matrix van het affine Dynkin-diagram  
 'dat bij  $G$  hoort'. (zie I. § ). In feite is deze op-  
 merking de formulering van een nieuw probleem: vindt  
 een 'goede' verklaring voor dit verschijnsel. Als zodanig  
 wordt dit probleem een onderdeel van het algemene  
 A-D-E probleem (zie [11]).

- In dit hoofdstuk zal gepoogd worden een schets te geven  
 van een meetkundige constructie, die aan elke repre-  
 sentatie  $\rho$  van  $G$  een divisor  $\mathrm{rc}(\rho)$  op de minimale  
 resolutie van de simpele singulariteit  $\mathbb{C}^2/G$  toevoegt.
- In §1. worden enkele algemeen heden over representatie-  
 grafen en decompositie matrices besproken, alsmede een  
 verklaring van McKay's opmerking, afkomstig van  
 Steinberg. §2. bevat de formulering van 'de Stelling  
 van Gonzalez-Sprinberg & Verdier' [12]. §3. is een  
 schets van de constructie van H. Knörrer [13].

## §1. Representatie grafen.

§1.1; Laat  $G$  een eindige groep zijn,  $\text{Irr}(G)$  de verzameling van irreducibele (complexe) representaties, die we met  $\rho_1, \dots, \rho_m$  ( $m = \#\text{Irr}(G) = \#\text{Conj}(G)$  = aantal conjugatie klassen van  $G$ ) zullen aangeven.  $R(G)$  is de ring van virtuele representaties van  $G$ .

Zij nu  $\theta$  een willekeurige representatie van  $G$ . Het tensor product  $\theta \otimes \rho_i$ ,  $\rho_i \in \text{Irr}(G)$  valt i.h.a. uiteen in verschillende irreducibele componenten  $\rho_i$ , met zekere multipliciteiten.

We schrijven:  $\theta \otimes \rho_i = \sum a_{ij} \cdot \rho_i$ .

De matrix  $(a_{ij})$  noemen we de decompositiematrix van  $\theta$ .

Laat nu  $V_{\mathbb{Z}} = R(G)$  opgevat als  $\mathbb{Z}$ -module.

In  $V_{\mathbb{Z}}$  hebben we een natuurlijke basis  $\text{Irr}(G)$ , orthonormaal t.o.v. het innerproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , met  $\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \bar{\psi}(g)$  ( $\chi$  het karakter van  $\chi$ ).

Voor een  $\theta \in R(G)$  hebben we een endomorfisme van  $V_{\mathbb{Z}}$ :

$A^{\theta}: V_{\mathbb{Z}} \rightarrow V_{\mathbb{Z}}$ ;  $\psi \mapsto \theta \otimes \psi$ . Het is duidelijk dat deze  $A^{\theta}$ 's combineren tot een morfisme van ringen:

$$A: R(G) \rightarrow \text{End}(V_{\mathbb{Z}}); \theta \mapsto A^{\theta}$$

De matrix van  $A^{\theta}$  t.o.v. de natuurlijke basis  $\text{Irr}(G)$  is precies de decompositiematrix van  $\theta$ :

$$A^{\theta}_{ij} = a_{ij} = \langle \theta \otimes \rho_i, \rho_j \rangle.$$

§ 1.2; We vermelden nu enkele voor de hand liggende eigenschappen van de matrices  $A^\theta_{ij}$ .

1.2.1. De matrix van  $A^\theta$  is i.h.a. niet symmetrisch.

Wel hebben we het volgende:

$$d: A^\theta_{ij} = \langle \theta \otimes p_i | p_j \rangle = \langle \theta \otimes \bar{p}_i | \bar{p}_j \rangle = A^\theta_{\bar{j} \bar{i}} \quad \text{met } \bar{p}_i = p_i$$

(Voor een representatie  $\chi$  zetten we  $\bar{\chi}$  voor de duale representatie; dus  $\bar{\chi}(g) = \chi(g^{-1})^T$ ).

$$B: A^{\bar{\theta}}_{ij} = \langle \bar{\theta} \otimes p_j | p_i \rangle = \langle \overline{\theta \otimes p_j} | p_i \rangle = \langle \theta \otimes \bar{p}_j | \bar{p}_i \rangle = \langle \theta \otimes p_i | p_j \rangle$$

Dus:  $A^{\bar{\theta}} = (A^\theta)^T$

Omdat  $A$  injectief is volgt nu:

$$\theta = \bar{\theta} \iff A^\theta \text{ symmetrisch.}$$

1.2.2. Uit  $\theta \otimes p_i = \sum a_{ij} p_i$  volgt door sporen nemen:

$$\chi_\theta(x) \cdot \chi_j(x) = \sum a_{ij} \chi_i(x)$$

Blijkbaar is de vector  $\delta_x := \sum \chi_i(x) p_i$  voor  $x \in \text{Conj}(G)$

simultane (linker) eigenvector voor alle operatoren  $A^\theta$ .

De overeenkomstige eigenwaarde is  $\chi_\theta(x)$ .

Wegens 1.2.1 zijn de  $\delta_x$  ook (rechter) eigenvectoren, maar

dan met eigenwaarde  $\bar{\chi}_\theta(x) = \chi_\theta(x^{-1})$

Dus:  $\delta_x$  rechter eigenv. van  $A^\theta$  met eigenw.  $\bar{\chi}_\theta(x)$

$\delta_x$  linker " " " " " " " "  $\chi_\theta(x)$

Dit is een aardige interpretatie van de karaktertabel van  $G$ .

Als voor een rechte  $\theta \in R(G)$  de afbeelding  $x \mapsto \chi_\theta(x)$

$x \in \text{Conj}(G)$  injectief is, dan is de kennis van  $A^\theta$

equivalent met kennis van de gehele karaktertabel.

Zo'n  $A^\theta$  bepaalt dus ook alle andere de compositie-matrices.

Merk op:  $\delta_x$  is zowel linker als rechter eigenvector bij derzelfde eigenwaarde ( $\Leftrightarrow \chi_\theta(x) \in \mathbb{R}$ ). De vector  $\delta_1 = \sum \chi_i(1)p_i = \sum d_i p_i$  ( $d_i = \deg(p_i)$ ) = Reg = reguliere-representatie heeft deze eigenschap voor alle  $\theta$  en alle  $G$ .

Verder:  $\langle \delta_x | \psi \rangle = \psi(x)$  en dus:  $A^{\delta_x}_{ij} = (\chi_i(x) \bar{\chi}_j(x))$  en  $A^{\text{Reg}}_{ij} = (d_i \cdot d_j)$

1.2.3. Laat  $\Gamma_\theta$  de graaf zijn, eventueel met labels pijlen en loops (= 'zelfintersecties'), die op de gebruikelijke wijze uit de matrix  $A^\theta_{ij}$  ontstaat. We hanteren de gebruikelijke conventies betreffende wege latten van labels en pijlen ( $\overset{1}{\longleftrightarrow} = \longrightarrow$ ;  $\longrightarrow = \bigcirclearrowright$ ;  $Q = 0$ )

We noemen  $\Gamma_\theta$  de representatie graaf van  $\theta$ .

Dan geldt, o.m. omdat elke irreducibele representatie in een tensorproduct van een trouwe representatie opgaat (zie [15]):

$\Gamma_\theta$  samenhangend  $\Leftrightarrow \theta$  is trouw.

We werken nu, om deze feiten te illustreren een en vondig voorbeeld uit:

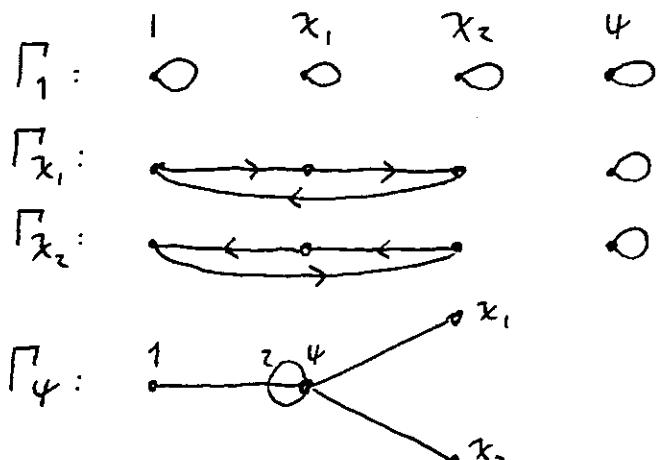
d.  $G = A_4$ , de alternerende groep op 4 elementen.

De karakter tabel is:

#		1	$\chi_1$	$\chi_2$	$\psi$
1	1	1	1	1	3
3	a	1	1	1	-1
4	b	1	$\omega$	$\omega^2$	0
4	c	1	$\omega^2$	$\omega$	0

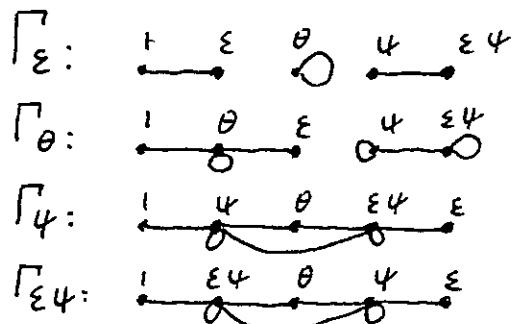
$$(\omega = e^{2\pi i/3})$$

De graaf is:



B.  $G = S_4$ , de symmetrische groep op 4 elementen.

#		1	$\varepsilon$	$\theta$	$\psi$	$\varepsilon 4$
1	1	1	1	2	3	3
6	(ab)	1	-1	0	1	-1
3	(ab)(cd)	1	1	2	-1	-1
8	(abc)	1	1	-1	0	0
6	(ab)(cd)	1	-1	0	-1	1



1.2.4. Boven staan de voorbeelden roepen de vraag op wat het verband is tussen de grafen van de representaties van  $G$  en die van een ondergroep  $H$ . In het algemeen is dit natuurlijk minstens zo moeilijk als het verband tussen  $R(H)$  en  $R(G)$ . We zullen in het geral  $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$  wat nader bekijken.

We herinneren de lezer aan de volgende feiten (zie [15]):

Laat  $\alpha: H \rightarrow G$  een morfisme van groepen. Zijn  $\alpha$

inductie:  $\alpha^*: R(G) \rightarrow R(H)$  (restrictie; Res)

(homomorfisme van ringen)

en  $\alpha_*: R(H) \rightarrow R(G)$  (inductie; Ind)

(homomorfisme van groepen).

Dit is functorieel en verder:

$$\langle \alpha_* \varphi | \psi \rangle_G = \langle \varphi | \alpha^* \psi \rangle_H \quad ("Frobenius")$$

$$\langle \alpha^*(\varphi) \otimes \psi \rangle = \alpha^*(\varphi \otimes \alpha^* \psi) \quad (\text{Projectie formule}).$$

Voor  $i: H \hookrightarrow G$  schrijft men  $i^* = \text{Res}_H^G = \text{Res}$ ;  $i_* = \text{Ind}_H^G = \text{Ind}$ .

Stel nu:  $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$  exact. We hebben dan

een actie  $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(R(H))$ ;  $s \mapsto p^s$ ;  $p^s(x) = p(s^{-1}x s)$

Er geldt dan:  $\text{Res} \text{Ind } p = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} p^s$  (Mackey dekompositie)

Hieruit volgt o.a:  $\text{Ind } p$  irreducibel  $\Leftrightarrow \langle p | p^s \rangle = 0 \quad s \neq 1$ .

('Criterium van Mackey').

Laat nu  $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$  een exacte rij.

We schrijven  $p^\varepsilon$  voor de  $p^s$   $s \in \mathbb{Z}/2$   $s \neq 1$

Men gaat een voorzag na dat  $\text{Ind } 1 = 1 + \varepsilon \quad ; \deg(\varepsilon) = 1$

$\varepsilon \neq 1$ ;  $\varepsilon^2 = 1$ ;  $\text{Res } \varepsilon = 1$ .

Merk op:  $p \in \text{Irr}(G) \Leftrightarrow \varepsilon \otimes p =: \varepsilon_p \in \text{Irr}(G)$ .

Met behulp van bovenstaande feiten bewijst men

een voorzag het volgende lemma (zie [16], ook voor een bewijs.):

Lemma: Laat  $\rho \in \text{Irr}(H)$ . Dan geldt:

$$1) \text{Ind } \rho = \text{Ind } \rho^\vee = \varepsilon \text{ Ind } \rho$$

$$2) \text{Ind } \rho = \begin{cases} \rho' \in \text{Irr}(G) & \Leftrightarrow \rho \neq \rho^\vee \\ (\mathbb{1} + \varepsilon)\rho'; \rho' \in \text{Irr}(G) & \Leftrightarrow \rho = \rho^\vee \end{cases}$$

Laat  $\varphi \in \text{Irr}(G)$ . Dan geldt:

$$1) \text{Res } \varphi = \text{Res } \varepsilon \varphi = \text{Res } \varphi^\vee$$

$$2) \text{Res } \varphi = \begin{cases} \rho \in \text{Irr}(H) & \Leftrightarrow \varphi \neq \varepsilon \varphi \\ \rho + \rho^\vee; \rho \in \text{Irr}(H) & \Leftrightarrow \varphi = \varepsilon \varphi \end{cases}$$

Laat nu  $\theta$  een irreducibele representatie van  $G$  en zy  
 $\psi = \text{Res } \theta$  (ook irreducibel), dus  $\psi = \psi^\vee$ .

In het algemeen geldt:  $\langle \psi \otimes \rho | \chi^\vee \rangle = \langle \psi^\vee \otimes \rho^\vee | \chi \rangle$

Dus:  $\psi \otimes \rho_i = \sum a_{ji} \rho_j \Leftrightarrow \psi \otimes \rho_i^\vee = \sum a_{ji} \rho_j^\vee$

M.a.w: de involutie  $\rho \leftrightarrow \rho^\vee$  werkt 'incidentie bewarend' op  $\Gamma_\psi$ .

Zij nu  $\pi_H: \Gamma_\psi \rightarrow \Gamma_\psi(H, G)$  de quotient afbeelding;  $\Gamma_\psi(H, G)$  is de quotient graaf (d.i.  $\pi_H \rho$  en  $\pi_H \psi$  worden door

$$\sum_{x \in \pi^{-1} \pi \psi} \langle \psi \otimes \rho | x \rangle = \sum_{y \in \pi^{-1} \pi \rho} \langle \psi \otimes y | \psi \rangle \text{ bijeen verbonden}.$$

Anderzijds hebben we voor de  $\rho_i \in \text{Irr}(G)$ :

$$\theta \otimes \rho_i = \sum b_{ji} \rho_j \Leftrightarrow \theta \otimes \varepsilon \rho_i = \sum b_{ji} \varepsilon \rho_j$$

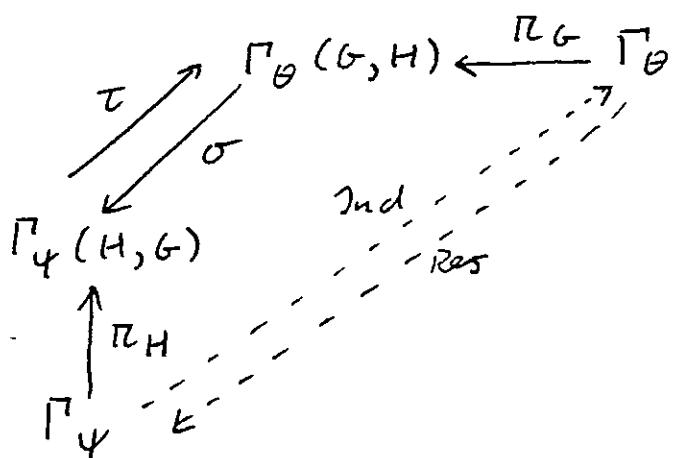
Dus ook  $\varepsilon \otimes$  werkt incidentie bewarend. Gelieed analog  
 hebben we een  $\pi_G: \Gamma_\theta \rightarrow \Gamma_\theta(G, H)$ , met intersecties  
 in  $\Gamma_\theta(G, H)$  analog als boven gedefinieerd.

Aan een punt  $t$  in  $\Gamma_4(H, G)$  voegen we een punt in  $\Gamma_\theta(G, H)$  toe, als volgt: Zij  $p \in \text{Irr}(H)$  representant v.  $\pi_H p \in \Gamma_4(H, G)$ . Als  $p \neq p^\vee$  dan  $\text{Ind} p =: p' \in \text{Irr}(G)$  volgens het lemma; Zet dan  $\tau: \pi_H p \mapsto \pi_G p'$ . Als  $p = p^\vee$  dan  $\text{Ind} p = p + \varepsilon p' \quad p' \in \text{Irr}(G)$ ; zet dan weer  $\pi_H p \mapsto \pi_G p'$ . Dit definiert een afbeelding  $\tau: \Gamma_4(H, G) \rightarrow \Gamma_\theta(G, H)$ . Analog hebben we een inverse  $\sigma: \Gamma_\theta(G, H) \rightarrow \Gamma_4(H, G)$ . De zaak is nu zo ingericht dat:

bewering:  $\sigma$  en  $\tau$  zijn isomorfismen van grafen.

bewijs: triviaal  $\square$ .

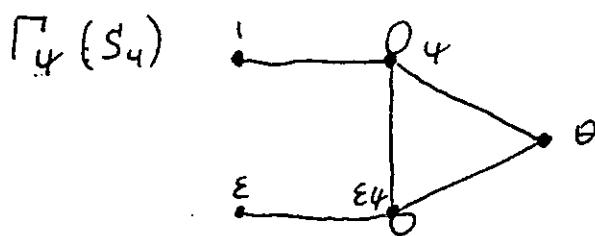
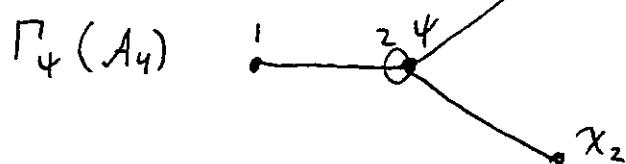
We hebben dus:



De grafen  $\Gamma_4$  en  $\Gamma_\theta$  verschijnen dus als 'overdrukking' van een gemengschappelijke tussengraaf.

Merk op:  $\pi_G^{-1} \circ \tau \circ \pi_H(p) = \{ \text{verz. } p' \in \text{Irr}(G) \text{ in } \text{Ind} p \}$   
 $\pi_H^{-1} \circ \sigma \circ \pi_G(p') = \{ p \in \text{Irr}(H) \text{ in } \text{Res } p' \}$

We illustreren dit weer met  $1 \rightarrow A_4 \rightarrow S_4 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$  en de representatie  $\psi \in \text{Irr}(S_4)$ .  $\text{Res } \psi \in \text{Irr}(A_4)$  heet 'toevallig' ook  $\psi$ .

 $\pi_G$  $\pi_H$ 

Merk op dat hier  $x_1^* = \bar{x}_1 = x_2$ ; dat is wel vaker zo.

We zien dus dat voor  $I \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow I$  het verband tussen de grafen van  $H$  en  $G$  zeer eenvoudig door Res en Ind beschreven wordt.

§ 1.4. Laat nu  $\theta$  een vaste representatie van  $G$  zijn, en zij  $d = \deg(\theta) = \chi_\theta(I)$ .

We zetten nu op de ruimte  $V = V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes V_{\mathbb{Z}}$  een bilineaire vorm  $(\cdot, \cdot)$  door voor de basisvectoren  $p_i \in \text{Irr}(G)$  te definieren:  $(p_i, p_j) = d \cdot \mathbb{1}_{ij} - A_{ij}^\theta =: c_{ij}$

Volgens 1.2.2 geldt:  $x \in \langle \text{Reg} \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow (x, y) = (y, x) = 0 \quad \forall y \in V$ .

Zet nu  $V_e^\perp = \{x \in V \mid (x, y) = 0 \quad \forall y \in V\}$ ;  $V_r^\perp = \{x \in V \mid (y, x) = 0 \quad \forall y \in V\}$

$V^\perp = \{x \in V \mid (x, x) = 0\}$ ; duidelijk is:  $\langle \text{Reg} \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq V_e^\perp, V_r^\perp \subseteq V^\perp$

Lemma:  $(\cdot, \cdot)$  is positief semi definit.

Als  $\theta$  trouw is, dan  $V^\perp = \langle \text{Reg} \rangle_{\mathbb{R}}$  en omgekeerd.

bewijs: is een voudig, zie bijv [J].



Laat nu  $s_i(x) = x - z \frac{(x, p_i)}{(p_i, p_i)} \cdot p_i$  de

spiegeling in het hypervlak loodrecht op de vector  $p_i$ .

Direkte berekening leert:

$$s_i(\delta_x) = \delta_x + \{x_0(x) - x_0(1)\} x_i(x) \cdot p_i$$

met  $\delta_x = \sum x_i(x) \cdot p_i \in V_G$ .

Hieruit zien we:

i)  $\text{Reg} = \delta_1$  is invariant onder alle  $s_i$  en:

$\theta$  trouw  $\Leftrightarrow \text{Reg}$  is de enige vector die hieraan voldoet

(Dit geeft een ander bewijs voor het lemma).

ii) Voor trouwe  $\theta$  ligt de vector  $\delta_x$  in de hypervlakken loodrecht op de  $p_i$  voor precies die  $i \in \{1, \dots, m\}$

met  $x_i(x) = 0$

Op de ruimte  $\tilde{V} := V/V^\perp$  hebben we nu een positief definitie bilineaire vorm, die we weer met  $(\cdot, \cdot)$  zullen aandelen, net zoals we de projecties van de  $p_i \in \text{Irr}(G)$  in  $\tilde{V}$  gedaan  $p_i$  blijven noemen.

Merk op: in  $\tilde{V}$  geldt:  $-p_i = \sum_{i \neq i} d_i p_i$  met  $p_i = 1$  triviale representatie.

De spiegelingen  $s_i$  in  $\tilde{V}$  lateren onder i.h.a  $\pm \text{Irr}(G)$  niet invariant, dus krijgen we i.h.a geen wortelsysteem.

- § 1.5. We zullen nu laten zien, dat voor een binaire groep  $G \hookrightarrow SU_2(\mathbb{C})$  de matrix  $C = 2\mathbb{1} - A^c$  de Cartan matrix is van een affien irreducibel homogeen Dynkin diagram  $\Gamma_c(G)$ . De  $\varphi_i : i+1 \in \text{Irr}(G)$  vormen in  $\tilde{V}$  een simpel systeem van wortels voor het bij behorende wortelsysteem.
- We veronderstellen  $G \neq \{\mathbb{1}\}, \neq \{\pm 1\}$ .
- lemma: Laat  $C_{ij}$  de matrix van  $C = 2\mathbb{1} - A^c$ .
- Dan:
- $C_{ij} = C_{ji} \quad \forall i, j \quad (a_{ij} = a_{ji})$
  - $C_{ii} = 2 \quad \forall i \quad (a_{ii} = 0)$
  - $C_{ij} = 0 \text{ of } -1 \quad \forall i \neq j \quad (a_{ij} = 0 \text{ of } 1)$ .

bewijs:

- Omdat  $G \hookrightarrow SU_2$  geldt: de l.w van  $c(g)$  dan  $a^{-1} = \bar{a}$  ook, dus  $c = \bar{c}$ . Wegen § 1.2.1 volgt  $A^c$  symmetrisch.
- Als  $c$  reducibel (dus  $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) dan  $c = p + \bar{p}$  dus  $\langle c \otimes p_i | p_j \rangle = \langle p + \bar{p} \otimes p_i | p_j \rangle = 0$  omdat  $p \neq 1$ . Dus  $C_{ii} = 2 - \langle c \otimes p_i | p_i \rangle = 2$ .

Als  $c$  irreducibel, dan  $\{\pm 1\} \subseteq \text{Centr.}(G)$ . Stel  $p_i(-x) = (-1)^{n_i} p_i(x)$ , dan volgt  $(-1)^{n_i+1} c \otimes p_i = \sum a_{ji} (-1)^{n_j} p_j$  (omdat  $c(-x) = -c(x)$ ) dus volgt  $a_{ii} = 0$

- We hebben  $\langle c \otimes p_i | c \otimes p_i \rangle = \sum_j a_{ji}^2$
- Echter:  $\langle c \otimes p_i | c \otimes p_i \rangle = \langle c \otimes \bar{c} | \bar{p}_i \otimes p_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g |\chi_c(g)|^2 |\chi_i(g)|^2 \leq |\chi_c(1)|^2 \frac{1}{|G|} \sum_i |\chi_i|^2 \leq 4$

Als  $\sum a_{ji}^2 < 4$  dan volgt direct:  $a_{ij} = 0$  of 1.

Als  $\sum a_{ji}^2 = 4$  en tevens  $a_{ji} > 1$  voor reële  $j$  dan

volgt:  $c \otimes p_i = z p_j$  en dus ook  $c \otimes p_j = z p_i$ .

Omdat  $c$  trouw is, is  $\Gamma_c$  samenhangend, dus  $\rho_i$  en  $\rho_j$  zijn de enige irreducibele representaties van  $G$ . Er volgt  $G = \{\pm 1\}$  of  $G = \{1\}$  □

(zie [16])

Gevolg:  $\Gamma_c(G)$  is het affine Dynkin diagram van een homogeen irreducibel wortelsysteem (dus van type  $\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{E}$ )

De projecties van de  $\rho_i$  ( $i \neq 1$ ) in  $\tilde{V}$  vormen een simpel systeem van wortels voor dit wortelsysteem (Dynkin-diagram:  $\Gamma_c'(G) = \Gamma_c(G) \setminus \{\beta_1\}$ ).  $-\rho_1 = \sum_{i \neq 1} d_i \rho_i$  is de grootste wortel.

We moeten nu nog laten zien dat onder de toewijzing  
 $G \mapsto \Gamma_c(G)$  het goede diagram bij de goede groep  
terecht komt.

Voor een cyclische groep is dit triviaal; het diagram  $\Gamma_c^t(G)$  is een cykel met  $n$  punten, dus  $\Gamma_c^t(G) \hookrightarrow A_{n-1}$ .

- In I § 3 . hebben we gezien dat de mogelijkheden voor een niet cyclische binaire groep geparametriserd worden door de Platонische triplets  $(p, q, r)$  met  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$
- $p, q, r \geq 2$  . N.l.  $G = \langle p, q, r \rangle = \langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^r = xyz \rangle$

- De mogelijkheden voor de Dynkin diagrammen worden hier ook door geparametriserd. De  $p, q, r$  beschrijven nu de lengtes van de takken in het diagram:

$$T_{P,q,r} = \text{Diagram showing a horizontal chain of circles with labels P, q, and r. A vertical line labeled r connects the middle circle of the chain to a point A at the bottom. The chain consists of circles connected by dashed arcs, with solid arcs connecting the first and last circles to the top and bottom respectively. The label P is above the first few circles, q is above the last few, and r is below the middle group. The label A is at the bottom right. The diagram is rotated 90 degrees clockwise relative to the original image.}$$

De toevoeging is dus:  $G = \langle p, q, r \rangle \mapsto \Gamma_c'(G) = T_{p', q', r'}$

We laten nu zien dat  $\{p, q, r\} = \{p', q', r'\}$ .

1<sup>e</sup> methode (veel bot). Volgens het bovenstaande zijn de coördinaten van de grootste wortel gelijk aan de dimensies van de overeenkomstige irreducibele representaties  $\#1$  van  $G$ . Omdat  $\#G = \sum d_i^2$  en  $G/[G, G] = Ab(G)$  een groep is van orde  $\#\{1\text{-dim. repr. van } G\}$  kan het niet meer mislopen. (☒).

Hieronder geven we de diagrammen met de coördinaten van de grootste wortel, samen met de bij behorende groepen, zodat de lezer deze bewering kan nagaan.

<u><math>G</math></u>	$\#G$	$\#Ab(G)$	<u><math>\Gamma_c(G)</math></u>
$\mathbb{Z}/n$	$n$	$n$	$\tilde{A}_{n-1}$
$D_n = \langle n, z, z \rangle$	$4n$	4	$\tilde{D}_{n+2}$
$\mathbb{T} = \langle 3, 3, 2 \rangle$	24	3	$\tilde{E}_6$
$\mathbb{O} = \langle 4, 3, 2 \rangle$	48	2	$\tilde{E}_7$
$\mathbb{I} = \langle 5, 3, 2 \rangle$	120	1	$\tilde{E}_8$

- Omdat de collectie van binaire groepen gesloten is onder commutator ondergroep nemen, is het een vondig om w.b.v. de diagrammen de commutator ondergroep te bepalen (zie [ ]). Als  $G$  een binaire groep is, dan is het diagram  $\Gamma'([G:G])$  gelijk aan  $\Gamma(G) \setminus \{1\text{-dim rep.'s}\}$
- Zo vinden we:  $[\mathbb{I}, \mathbb{I}] = \mathbb{I}$ ;  $[\emptyset, \emptyset] = \mathbb{T}$ ;  $[\mathbb{T}, \mathbb{T}] = \mathbb{D}_2$ ;  $[\mathbb{D}_n, \mathbb{D}_n] = \mathbb{Z}/n$

- 2<sup>e</sup> methode: Deze 2<sup>e</sup> methode, afkomstig van R. Steinberg [6], is wat ingewikkelder, maar ook veel leuker en mag daarom hier niet ontbreken.

- De groep  $G = \langle p, q, r \rangle$  wordt voortgebracht door 3 elementen  $x, y$  en  $z$  van orde  $zp$ ,  $zq$  en  $zr$  resp. De elementen  $1, xyz; x^a$  ( $1 \leq a < p$ );  $y^b$  ( $1 \leq b < q$ );  $z^c$  ( $1 \leq c < r$ ) vormen een systeem van representanten van de conjugatieklassen van  $G$ . De eigenwaarden v.d. matrices  $\in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$  zijn dan  $e^{\pm \pi i/p}$  voor  $x$ ,  $e^{\pm \pi i/q}$  voor  $y$ ,  $e^{\pm \pi i/r}$  voor  $z$ . Het karakter neemt dan de waarden  $2, -2, 2 \cos(\pi a/p), 2 \cos(\pi b/q)$ ,  $2 \cos(\pi c/r)$  op de conjugatie klassen aan. Volgens 1.2.2 zijn dit de eigenwaarden van  $A^c = 2\mathbb{I} - C$ , met  $C$  de Cartanmatrix van  $\Gamma_c(G)$ .

- bewering: Laat  $\tilde{\epsilon}$  een (uitgebreid) Coxeter-element in de Weyl groep van  $\Gamma_c(G)$ , en  $c$  het 'lineaire deel' van  $\tilde{\epsilon}$ . Dan zijn de eigenwaarden van  $c$   $1, e^{2\pi i a/p}, e^{2\pi i b/q}, e^{2\pi i c/r}$

- bewijs: Deel de simpele wortels  $\beta_1, \dots, \beta_m$  op in twee clubs z.d.d. de elementen in een zo'n club onderling  $\perp$  staan.

- De matrix  $2 - C$  verschijnt dan in blok vorm  $\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & N \end{bmatrix}$

Schrijf  $\tilde{c} = \underbrace{s_1 \dots s_t}_{\text{uit een clus}} \underbrace{s_{t+1} \dots s_m}_{\text{andere}}$  met  $s_i$  de spiegeling  
bij  $\rho_i$ . Er volgt  $\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & N \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  en  $\tilde{c}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & N \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N & -1 \end{bmatrix}$

Dus  $\tilde{c} + \tilde{c}^{-1} = \begin{bmatrix} N & N-2 \\ 0 & N^2-2 \end{bmatrix} = (z\pi - c)^2 - z\pi$ , waaruit het  
gestelde volgt.  $\square$ .

Laat nu  $\Gamma_c^1(G) = T_{p', q', r'}$  en zij  $c_i$   $i=1, 2, 3$  het product  
van spiegelingen in de wortels langs de  $i^{\text{e}}$  tak, van het  
centrale punt  $\delta$  in het diagram uit naar de eindpunten  
(de spiegeling  $s_\delta$  in  $\delta$  niet meegenomen).

Het element  $c_1 c_2 c_3$  heeft eigenwaarden  $e^{2\pi i a'/p'}, e^{2\pi i b'/q'}, e^{2\pi i c'/r'}$   
en 1, omdat de takken van type  $A_{p'-1}, A_{q'-1}$  en  $A_{r'-1}$  zijn,  
plus een eigenwaarde 1 omdat  $c_1 c_2 c_3$  één spiegeling minder  
bevat dan de rank van  $T_{p', q', r'}$  ( $= p' + q' + r' - 2$ ).

bewering: Laat  $s_\delta$  de spiegeling in de wortel  $\delta$ , correspon-  
derend met het centrale punt in  $T_{p', q', r'}$ . Zij  $p$  de grootste  
wortel en  $s$  de coëfficiënt van  $\delta$  in  $p$ .

Dan geldt:  $(c_1 c_2 c_3 s_\delta)^s(-\delta) = p$

bewijs: zie [ ], niet moeilijk.

Het is instructief om in een voorbeeld te zien hoe het  
coxeter-element  $R := c_1 c_2 c_3 s_\delta$  de wortel  $-\delta$  in de  
grootste wortel  $p$  overvoert.

Voorbeeld:  $E_8$

We geven met onderstaande getallen de coördinaten van

de  $\mathcal{R}$  getransformeerden van  $-\delta$  t.o.v de simpele wortels.

$$-\delta = 0010000 \xrightarrow{\mathcal{R}} 111111 \xrightarrow{\mathcal{R}} 122221 \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathcal{R}} 1233321 \xrightarrow{\mathcal{R}} 2344321 \xrightarrow{\mathcal{R}} 2454321 \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathcal{R}} 2465432 = p = \mathcal{R}^6(-\delta)$$

We kunnen nu bewijzen  $\{p, q, r\} = \{p', q', r'\}$

Laat n.l.  $c = s_{-\rho} c_1 c_2 c_3 \delta_\delta$

Omdat  $-\rho = \mathcal{R}^s(\delta)$  geldt  $s_{-\rho} = s \mathcal{R}^s(\delta) = \mathcal{R}^s s_\delta \mathcal{R}^{-s}$

Dus:  $c = \mathcal{R}^s s_\delta \mathcal{R}^{-s} \cdot \mathcal{R} = \mathcal{R}^{s-1} c_1 c_2 c_3 \mathcal{R}^{1-s}$

M.a.w:  $c$  is geconjugeerd met  $c_1 c_2 c_3$

Volgens bewering 7 heeft  $c$  e.w's  $1, e^{2\pi i \alpha/p}, e^{2\pi i \beta/q}, e^{2\pi i \gamma/r}$

terwijl  $c_1 c_2 c_3$  e.w's  $1, e^{2\pi i \alpha'/p'}, e^{2\pi i \beta'/q'}, e^{2\pi i \gamma'/r'}$  had.

Hieruit volgt:  $\{p, q, r\} = \{p', q', r'\}$  ■

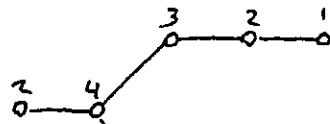
## § 1. 6 Slotopmerkingen.

1. 6. 1 Men kan zich afvragen of de inhomogene Dynkin diagrammen ook m.b.v. representaties

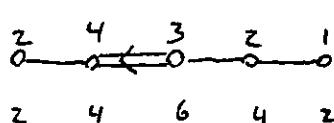
verkregen kunnen worden. Dat kan wel wanneer we twee in een geschakelde binaire groepen bekijken. Slodowy [17] definieert op iets andere wijze dan in § 1. 4 m.b.v. Res en Ind tussenliggende diagrammen, die we echter

dus al blijken te worden.

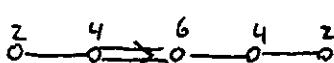
Voorbeeld:  $1 \rightarrow \pi \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$ .



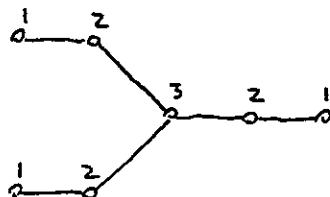
$$\tilde{E}_7 = \Gamma(\emptyset)$$



$$\tilde{F}_4$$



$$\tilde{F}_4^*$$



$$\tilde{E}_6 = \Gamma(\pi)$$

Op deze wijze verkrijgt men alle Euclidische gegeneraliseerde Cartan-diagrammen.

1.6.2 In I § zagen we hoe een resolutiegraaf via Mumford's presentatie van de fundamentealgroep van de link aan elk Dynkin-diagram van type A, D of E een binaire groep toewegt. In beschouwingswijze correspondeert met elk punt in het diagram een element v.d. groep of beter, een conjugatieklasse  $\neq \{1\}$ .

In dit hoofdstuk zagen we hoe via McKay's correspondentie het diagram van  $G$  m.b.v. representaties terug gevonden kan worden. Met elk punt in het diagram correspondeert nu een irreducibele representatie  $\neq 1$ .

Nu zijn conjugatieklassen en representaties dual (men kan karakteren op klassen evalueren,) maar niet

canonische isomorf. Voor een binaire groep krijgen we via de diagrammen echter wel een min of meer natuurlijke bijectie. De vraag is nu: hoe kan men bij een conjugatieklasse direct de bijbehorende representatie vinden?

Voor zover ik kan zien is er geen verband tussen de representaties en de waarden van de karakteren op de anderhand kromstige conjugatieklassen.

1.6.3. Men zou ook kunnen proberen direct uit de structuur van de conjugatieklassen van een binaire groep diagrammen te construeren.

In eerste instantie lijkt het volgende veelbelovend:

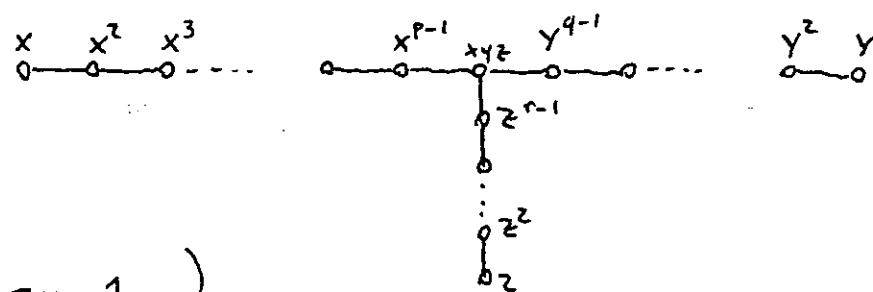
Laat  $C_1$  en  $C_2$  conjugatie klassen. De producten  $x_1 \dots x_n$ ,  $x_i \in C_i$  vormen een vereniging van conjugatie klassen. In de 'Klassen ring'  $\mathbb{K}(G)$  schrijven we  $C_1 \cdot C_2 = \sum d_{ij} C_j$  en we kunnen hopen dat voor geschikte keuze van  $C$  de matrix  $d_{ij}$  weer een Cartan matrix oplevert.

Wat echter lijkt te ontbreken is een canonische klasse. Een verder probleem is dat langs de takken van het diagram het aantal elementen per conjugatieklasse constant is.

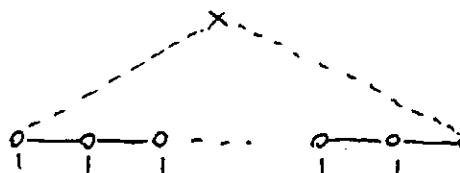
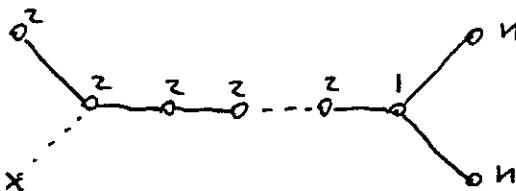
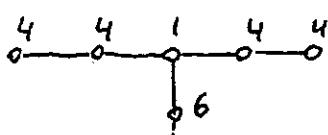
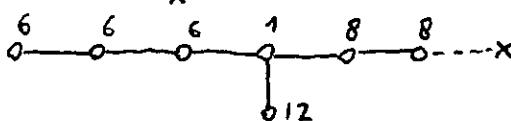
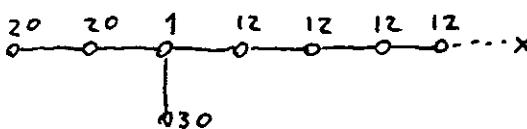
Hieronder geven we deze aantallen.

(Punten in diagram zijn nu de volgende conjugatie klassen:

$$G = \langle p, q, r \rangle$$



en  $x$  de klasse van 1.)

$\mathbb{Z}/n$  $D_n$  $\Pi$  $\text{D}$  $\text{II}$ 

Merk op: deze getallen zijn gelijk aan het aantal hoekpunten, ribben en vlakken van het overeenkomstige regelmatige veelvlak.

Tevens zijn dit de graden van de fundamentele invarianten van de commutator ondergroep.

De klassering structuur van  $D_n$  is een voudig:

Laat  $C_a = \{x^a, x^{2n-a}\}$  ( $C_0 = 2\{1\}$ ;  $C_n = 2\{-1\}$ ) en

$C_y = \bigcup_k \{x^{2k}y\}$ ;  $C_z = \bigcup_k \{x^{2k}z\}$

Dan:  $C_a \cdot C_b = C_{a+b} + C_{a-b}$

$$C_a \cdot C_y = 2 \delta(a|E) C_y + 2 \delta(a|O) C_z \quad (\delta(a|O) = \begin{cases} 0 & a \text{ even} \\ 1 & a \text{ oneven} \end{cases})$$

$$C_a \cdot C_z = 2 \cdot \delta(a|O) C_y + 2 \delta(a|E) C_z$$

$$C_y \cdot C_y = C_z \cdot C_z = n \cdot \begin{cases} \{1\} + C_2 + C_4 + \dots + C_{n-2} + \{-1\} & n \text{ even} \\ C_1 + C_3 + \dots + \{-1\} & n \text{ oneven} \end{cases}$$

$$C_y \cdot C_z = n \cdot \begin{cases} C_1 + C_3 + \dots + C_{n-1} & n \text{ even} \\ \{1\} + C_2 + C_4 + \dots + C_{n-1} & n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Het is mij niet gelukt hier uit iets Dynkin diagram -achtigs uit te halen.

## §2. De stelling van Gonzalo-Sprinberg & Verdier.

De minimale (= goede) resolutie van de simpele singulariteit  $\mathbb{C}^2/G$ , met  $G$  een binair groep, heeft een resolutie graaf in de vorm van een Dynkin diagram van type A, D of E. (zie I §4.).

In de vorige § is uit een gezet hoe men m.b.v. de irreducibele representaties  $\neq 1$  een diagram  $\Gamma_c'(G)$  verkrijgt dat isomorf is met deze resolutie graaf. Men kan zich afvragen of deze correspondentie 'toevallig' is, of dat men dit isomorfisme op een natuurlijke wijze kan realiseren.

Onafhankelijk van elkaar hebben Gonzalo-Springer & Verdier [12] en H. Knörrer een meetkundige constructie gegeven die aan elke irreducibele representatie  $\neq 1$  van  $G$  een divisor op de resolutie  $\tilde{X}$  van  $X = \mathbb{C}^2/G$  toeroegt, die de exceptionele divisor precies in één component snijdt, en die zo het isomorfisme van diagrammen realiseert.

### §2.1 Notatie en definities.

Lat dat  $G \subset \subset \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$  een binair groep, werkend op  $V := \mathbb{C}^2$  via 'n natuurlike representatie  $c$ .

We noteren  $(X, o)$  voor  $V/G$  de corresponderende simpele singulariteit. (Waar nodig verstaan we klemmer van singulariteiten of resoluties. We maken geen

onderscheid in notatie.)

propositie: Laat  $K^G(V)$  de Grothendieck ring van coherentie  $\mathcal{O}_V$ -modulen met  $G$ -actie en  $R(G)$  de representatie ring van  $G$ . Dan is de afbeelding

$$\lambda: R(G) \longrightarrow K^G(V); \rho \longmapsto \mathcal{O}_V \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho}$$

, met  $E_{\rho}$  de representatie ruimte van  $\rho$ , een isomorfisme van ringen.

bewijs: zie [ ]. De onderliggende vectorbundel van

$\mathcal{O}_V \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho}$  is natuurlijk  $V \times E_{\rho}$ , met  $G$ -actie  $g(v, e) = (c(g) \cdot v, \rho(g)e)$

Laat  $(\tilde{X}, E) \xrightarrow{\pi} (X, o)$  de minimale resolutie van  $X, o$ ,  $E$  de exceptionele divisor;  $E = \cup E_i$ ;  $\text{Irr}(E) = \{E_i\}$  de verzameling irreducibele componenten.

Laat  $\text{Pic}(\tilde{X}) = \text{Pic}(E)$  de lokale Picard varieteit van  $E$  (d.i.: groep van lokale divisoren mod equivalentie, of de groep van inverteerbare  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -modulen) en  $\text{Pic}_E(\tilde{X})$  idem met support in  $E$ . De  $E_i$  vormen een basis voor  $\text{Pic}_E(\tilde{X})$  en

zij  $F_i \in \text{Pic}(\tilde{X})$  een de duale basis (n.b.  $X, o$  is rationaal).

De  $F_i$  zijn dus divisoren die  $E_i$  transversaal snijden, en vander niet. Zij tenslotte  $K(\tilde{X})$  de Grothendieck groep van coherentie  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -modulen.

propositie: De afbeelding  $\varphi: K(\tilde{X}) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \text{Pic}(\tilde{X})$

$x \longmapsto (\text{rank } x, c_1(x))$  is een isomorfisme van groepen.

Hierin is  $\text{rank } x$  de rank van het modul x en  $c_1$  een 1e Chern klasse.

bewijs: zie [12].

Beschouw het diagram:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow q \\ V & \longrightarrow & X \end{array}$$

met  $\tilde{V} = (V \times_{\tilde{X}} \tilde{X})^{\text{red}}$

en de afbeelding  $\pi: R(G) \rightarrow k(\tilde{X})$  gedefinieerd door  $p \mapsto (\mathcal{O}_{\tilde{V}} \otimes_{\mathcal{O}_V} (\mathcal{O}_V \otimes_{\mathbb{C}} E_p))^G =: F_p = \pi(p)$ .

Stelling: (Gonzalez-Sprinberg & Verdier)

- i)  $\pi$  is een isomorfisme van groepen.
- ii)  $F_p$  is locaal vrij van rang  $\deg(p)$ .
- iii) Voor  $p \in \text{Irr}(G); p \neq 1$  is er precies een  $E(p) \in \text{Irr}(E)$  met  $\pi(p) = (\deg p, F(p))$  en verder:

$$E(p_i) \cdot E(p_j) = \langle ( \otimes p_i ) | p_j \rangle \quad ; \quad p_i \neq p_j .$$

bewijs: Dit is de inhoud van [12].

- iii) zegt dus dat de afbeelding  $\pi$  het isomorfisme van groepen realiseert.
- ii) het locaal vrij zijn van  $F_p$  betekent dat we een vectorbundel op  $\tilde{X}$  krijgen. Het bewijs hiervan maakt essentieel gebruik van de rationaliteit van  $X, o$ .

De schoof  $\pi(p)$  verrijgt nu ook als volgt:

een invariante sectie  $s \in H^0(V, E)^G$  met  $E = \mathcal{O}_V \otimes E_p$  levert een sectie  $s' \in H^0(X-o, E')$  met  $E'$  de schoof van de vectorbundel  $V \times E_p/G$  op  $X-o$ . Dit levert weer een sectie  $s'' \in H^0(\tilde{X}-E, E'')$  onder het isomorfisme  $\tilde{X}-E \xrightarrow{q} X-o$ .

en dit geeft tenslotte een sectie  $\pi(s) = i^* s'' \in i^* E''$   
 met  $i : \tilde{X} - E \hookrightarrow \tilde{X}$  de inclusie. Laat nu  $\pi(p)$  de  
 schoof voortgebracht door  $\pi(s)$ ;  $s \in H^0(V, E)^G$ .  
 (zie [13].)

Het bewijs van bovenstaande stelling in [12] is niet  
 zo erg begrijpelijk. In de volgende § geven we een  
 behandeling gebaseerd op het werk van H. Knörrer, dat  
 veel eenvoudiger van aard is.

### § 3. De constructie van H. Knörrer.

We zullen trachten de behandeling zo eenduidig en  
 expliciet mogelijk te houden.

Het idee van de constructie is eenvoudig: de schoof  
 $\pi(p)$  wordt voortgebracht door globale secties  
 $s_i \quad i=1, \dots, d \quad d=\deg(p). \in (R \otimes E_p)^G \quad R = \mathbb{C}[x, y]$ .  
 Door geschikte determinanten te vormen verkrijgen  
 we zekere sluitinvarianten  $j_p$  en  $j'_p$  die een divisor  
 op  $X = V/G$  voorstellen. Het zal blijken dat de strikt  
 getransformeerde van  $\lambda j_p + \mu j'_p = 0, \lambda, \mu$  generiek, de  
 exceptionele divisor  $E \subset \tilde{X}$  op de goede manier snijdt  
 en de 1<sup>e</sup> chernklasse van de locaal vrije schoof  $\pi(p)$   
 voorstelt.

§ 3.1

J-polynomen.

We beginnen met het algemene begrip J-polyloon.

Laat  $G$  een eindige groep, werkend op een vectorruimte

$V$  over  $\mathbb{C}$  en zij  $R = \text{Sym}(V)$  de symmetrische algebra van  $V$  (dus  $\text{Sym}(V) \cong \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$   $n = \dim V$ ).

We kiezen nu een vast H.S.O.P (homogen systeem van parameters)  $\theta_1, \dots, \theta_n$  voor de ring van invarianten  $R^G$  (dus  $\theta_i \in R^G$  alg. onafh. en  $R^G \leftarrow S := \langle [\theta_1, \dots, \theta_n] \rangle$  geheel).

Laat  $M = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ . Het is bekend (en een voudig in te zien, zie [18]) dat de gegradeerde vectorruimte

$R/M$  als  $G$ -modul isomorf is met  $t \cdot \text{Reg}$ , met

$\text{Reg}$  de reguliere representatie en het getal  $t = \prod \deg \theta_i / |G|$ .

Voor elke irreducibele representatie  $\rho$  kunnen we dus

$t \cdot \deg \rho$  copieën van  $E_\rho$  in  $R/M$  vinden. Door terug te liften naar  $R$  kunnen we schrijven:

$$R = \mathcal{H} \otimes S \quad \text{met } \mathcal{H} \cong \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} \bigoplus_{i=1}^{t \deg \rho} E_{\rho, i} \subset R$$

Zij nu  $N: \text{Irr}(G) \rightarrow \mathbb{Z}^N$ ;  $\rho \mapsto N_\rho \in \mathbb{N}$

z.d.d. i)  $\# N_\rho = \deg \rho$  ii)  $k \in N_\rho \Rightarrow k \leq t \deg \rho$

een functie die voor elke representatie  $\deg(\rho)$  indices uitlijst. We vormen  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_N = \bigoplus_{\rho} \bigoplus_{j \in N_\rho} E_{\rho, j} \subset \mathcal{H}$ .

dus  $\mathcal{R} \cong \text{Reg}$  als  $G$ -modul.

Verder  $\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{R} \otimes E_\rho)^G = \deg \rho$

$$(\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{H} \otimes E_\rho)^G = t \cdot \deg \rho).$$

Kies nu een basis  $s_1, \dots, s_d$   $d = \deg(p)$  voor  
 $(R \otimes E_p)^G$  en schrijf  $s_i = \sum s_{ij} \otimes e_j$ ;  $s_{ij} \in R$ ,  $e_j \in E_p$

We definieren:

$$j_{R,p} = \det(s_{ij})$$

of, meer invariant,  $j_{R,p} = s_1 s_2 \dots s_d \in (R \otimes I^d E_p)^G$

De volgende eigenschappen zijn evident:

- i)  $j_{R,p}$  hangt tot op een scalar  $\neq 0$  niet van de basis keuze  $\{s_i\}$  af.
- ii)  $j_{R,p}$  is een  $\det(\bar{p})$ -semi-invariant.

Voor een willekeurig representatie  $\chi$  definiëren we

$$j_{R,\chi} \text{ door te lissen } j_{R,\chi+\chi} = j_{R,\chi} \cdot j_{R,\chi}.$$

Zij tenslotte  $J_R = j_{R,\text{reg}}$  (de 'hoofd  $j$ ').

Het zou zeer moeilijk zijn om precitere condities te vinden waaronder  $j_{R,p} \neq 0$ . Dit blijkt i.h.a. zeer moeilijk te zijn.

Het is duidelijk dat  $J_R(x) \neq 0 \Leftrightarrow j_{R,p}(x) \neq 0 \quad \forall p \in \text{Irr}(G)$ .

Wel hebben we het volgende flauwe:

Lemma: Laat  $R_\zeta = \langle x \in R \rangle_\zeta$  en zij  $x \in V$

Dan geldt:  $J_R(x) \neq 0 \iff$

$\pi_x: R_\zeta \longrightarrow F_{G,x}$  is een isomorfisme.

waarbij  $\pi_x$  de afbeelding is die een functie uit  $R_\zeta$  beperkt tot een functie op de baan van  $x$ ,  $\in F_{G,x}$ .

bewijs: zie [1g].

Voor een reflectie groep (dan  $t=1$ ;  $R = H$ ) volgt direct  $J_R \neq 0$ .

§3.2. Voor  $V = \mathbb{C}^2$  en  $G$  een binaire groep zullen we in wat we volgt polynomen  $j$  van boren staand type bepalen.

Door  $G$  met index  $2$  in een reflectiegroep  $G'$  in te bedden (dus  $1 \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$ ) krijgen we een natuurlijk parameter systeem van de invarianten van  $G'$

Zij  $R^{G'} = \mathbb{C}[\Phi, H]$ . We hebben  $t=2$ .

en we schrijven  $R^G = (1 \otimes j) \otimes R^{G'}$  met  $j$  een invariant van  $G$  van graad  $m$  (die een semi invariant van  $G'$  is)

De graden  $n_1$ ,  $\deg \phi = n_1$ , en  $\deg H = n_2$  noemen we de graden van  $G$ .

Dene zijn:

	$n_1$	$n_2$	$m$
$\mathbb{Z}/n$	2	$n$	$n$
$\mathbb{D}_n$	4	$2n$	$2n+2$
$\mathbb{T}$	6	8	12
$\mathbb{O}$	8	12	18
$\mathbb{II}$	12	20	30

Het gaan nu snel in ziet (zie [5])

Aan geven  $\dim_{\mathbb{C}} (H \otimes E_p)^G = 2d$   $d = \deg p$  kunnen we secties  $s_1, s_2, \dots, s_{2d}$  kiezen die  $(R \otimes E_p)^G$  (als  $S$ -modul) voortbrengen. Laat  $\deg s_i \leq \deg s_{i+1}$ .

We zullen zien dat in feite  $\deg s_i < \deg s_{i+1}$ , behalve wanneer  $p$  de z.g. centrale representatie  $3$  is, en  $i=d$ .

( $3$  is voor niet cyclische  $G$  het centrum van  $\Gamma_c^1(G)$ ; voor  $G = \mathbb{Z}/2n$  is  $3$  representatie 'diametraal t.o.v  $1$ ' in  $\Gamma_c^1(G)$ )

We vormen daarom  $j_p = s_1, \dots, 1s_d$  en

$j'_p = s_1, \dots, s_{d-1}, 1s_{d+1}$  en zetten:

$W(p) = \langle j_p, j'_p \rangle_{\mathbb{C}}$ . Merk op: de ruimte opgespannen door  $j_p$  en  $j'_p$  hangt nu, zelfs in het geval  $\deg s_d = \deg s_{d+1}$ , niet van de keuze van de secties af.

Wat we niet zullen bewijzen is het lastige:

Propositie:  $\dim_{\mathbb{C}} W(p) = 2$ .

Dit betekent i.h.b.  $j_p \neq 0, j'_p \neq 0$ .

Voor een bewijs zie [13] en [14].

We zullen een schets geven van:

Stelling: Laat  $f \in W(p)$  generiek en zij  $C_f$  de strikt getransformeerde van de divisor  $f=0$  in  $X$ .

Dan:

- i)  $C_f$  snijdt de exceptionele divisor in precies één punt, in één component  $e_p \in \text{Irr}(E)$ .
- ii) De toevoeging  $p \mapsto e_p$  realiseert het isomorfisme van diagrammen.
- (iii)  $C_f \cap C_{f'} = \emptyset$  als  $f \neq f'$ .

Met iets meer moeite kan men bewijzen dat de schoof  $\pi(p)$  inderdaad locaal vrij is, op  $\tilde{X} - C_f$  voortgebracht door  $s_1, \dots, s_d$  en dat de divisor  $C_f$  de 1<sup>e</sup> chern klasse van  $\pi(p)$  vertegenwoordigt.

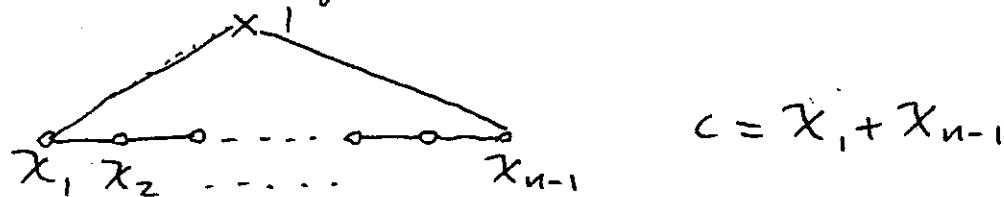
Voor dit soort zaken en vele andere details zie vooral [3].

### §3.3.

### Het cyclische geval.

Het cyclische geval is eenvoudig expliciet door te rekenen. Omdat dit geval iets afwijkt van de andere gevallen ( $\mathbb{Z}/n$  is niet van driehoeks type, zie I §4.) en het algemene geval hier in feite op terug gevoerd kan worden behandelen we dit eerst.

De representatiegraaf  $\Gamma_c(\mathbb{Z}/n)$  heeft de vorm:



$$\text{met } x_k \left( \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) = z^k.$$

De fundamentele invarianten  $X=xy$ ;  $Y=x^n$ ,  $Z=y^n$  bedden  $X=V/G$  in  $\mathbb{C}^3$  in als  $X^n - YZ = 0$ .

Zowel  $x^n$  als  $y^{n-k}$  transformeren volgens  $X_K$ . Dus:

$$W(X_{n-k}) = \langle x^n, y^{n-k} \rangle, \quad k=1, 2, \dots, n-1.$$

Een element  $f \in W(X_{n-k})$  is te schrijven als:

$$\lambda_1 x^n - \lambda_2 y^{n-k} = f$$

Met een kennis in Appendix I, waar de resolutie van cyclische quotiënten expliciet wordt uitgevoerd, volgt nu:

De divisor  $C_f$  snijdt de  $k$ -de divisor transversaal in één punt, en geen ander. (n.b. de kromme  $f=0$  is i.h.a. irreducibel). De stelling is in dit geval dus vrij triviaal. Merk op dat  $x^n$  de lineaire vorm is die met multipliciteit  $k$  op de speciale baan  $(0:1) \in \mathbb{P}(V)$  verdruijt, terwijl  $y^{n-k}$  in het antipodale punt valt.

§ 3.4

Speciale banen en resolutie graaf.

Het idee uit § 3.3 is te generaliseren naar het geral G niet cyclisch.

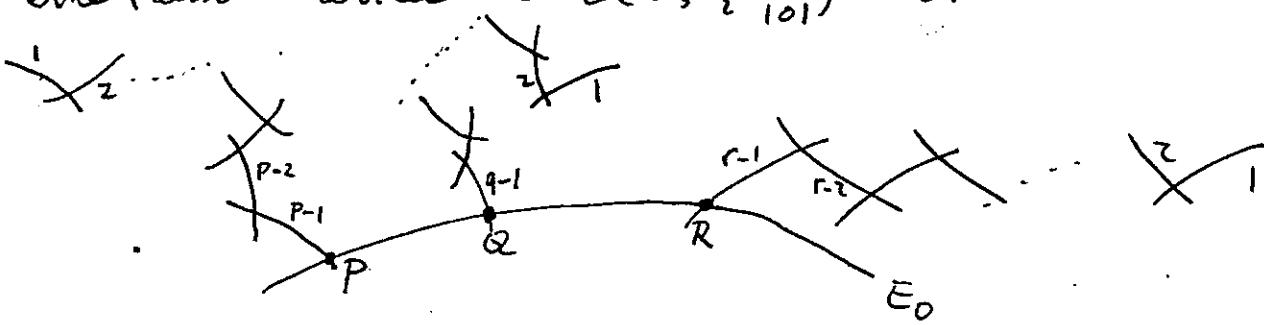
Stel nu G niet cyclisch.

Zoals we in I § zag hebben de actie van G op  $P(V)$  3 speciale banen. De stabilisator  $G_x$  van een punt  $x$  van zo'n speciale baan is cyclisch van orde  $zp, zq$  of  $zr$ .  
(n.b. -1 werkt triviaal op  $P(V)$ )

We herhalen het diagram: (vgl. I § 5.)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & E_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ L \longrightarrow QL & \xrightarrow{q} & P' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V \longrightarrow X & & \end{array}$$

$L$  is de 'blow up' van  $V$  in  $o$ , ofwel  $\text{Tot}(\mathcal{O}(-1))$ .  $QL$  heeft 3 singuliere punten, cyclische quotiënten van type  $(p, p-1)$ ,  $(q, q-1)$ ,  $(r, r-1)$ . De afbeelding  $P'(V) \rightarrow P'$  vertaalt in de punten v.d. speciale banen, boven 3 punten  $P, Q, R \in P'$ . Een exceptionele divisor is óf  $E_0$ , de centrale kromme, óf een component van de resolutie v.d. cyclische quotiënten. Een  $E$  wordt dus gegeven door een paar  $(\sigma, k)$  met  $\sigma$  een speciale baan en  $1 \leq k \leq \frac{|G|}{|\sigma|} - 1$  dus:  $E = e(\sigma, k)$ . Voor elke baan  $\sigma$  zetten we  $e(\sigma, \frac{|G|}{|\sigma|}) = E_0$ .



Zij nu  $z \in O$ ,  $O$  een speciale baan;  $|G_z| = 25$

Laat  $\ell$  de lineaire vorm zijn die in  $z$  verdwijnt,  $A(\ell)$  de vorm die verdwijnt in het antipodale punt (als  $\ell = \alpha x + \beta y$ , dan  $A(\ell) = -\bar{\beta}x + \bar{\alpha}y$ ). Zij  $\mathcal{C}(z, k)$  de schaar van krommen:

$$\lambda_1 \ell^k - \lambda_2 A(\ell)^{25-k} = 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

met  $1 \leq k \leq 5$ .

propositie: Voor generieke  $C \in \mathcal{C}(z, k)$  snijdt  $\pi(C)$  (de strict getransformeerde in  $\tilde{X}$  van  $C'$ , het beeld van  $C$  in  $X$ ) de exceptionele divisor transversaal in één punt, slechts liggend op  $e(O, k)$ . Verder  $\pi(C) \cap \pi(C'') = \emptyset \quad C \neq C''$ .

bewijs: Het is duidelijk dat  $\pi(C)$  ook gelijk is aan de getransformeerde van het beeld onder  $g$  van de getransformeerde van  $C$  in  $L$ . Als  $z' \in \mathbb{P}(V)$  en  $z' \notin O$  dan  $z' \notin C^\delta$  voor alle  $\delta \in G$  en bijna alle  $C \in \mathcal{C}(z, k)$ , dus  $\pi(C)$  snijdt slechts de exceptionele divisor hoogstens boven  $g(z) \in \mathbb{P}^1$ .

Op de blow-up  $L$  heeft  $C \in \mathcal{C}(z, k)$  in lokale coördinaten  $u, v$  ( $u, v \mapsto u.v = x, v = y$ ) de vorm

$$\lambda_1 u^k - \lambda_2 v^{25-k} = 0 \quad \text{en de actie van } G_z \text{ is}$$

$$\gamma_0 \cdot (u, v) = (3^2 u, 3v) \quad (\gamma_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{voortbrenger van } G_z)$$

Duidelijk is dat  $\gamma_0^5$  als spiegeling werkt en op  $L' = L/\gamma_0^5 = T_0 + (O(-z))$  hebben we in lokale coördinaten

$$\lambda_1 u^k - \lambda_2 w^{5-k} = 0 \quad (w = v^2) \quad \text{en } G_z \text{ werkt}$$

nu als  $(u, w) \mapsto (3^2 u, 3^{-2} w)$ . Het gestelde volgt nu uit het cyclische geval, met de opmerking dat de centrale kromme gegeven wordt door  $w=0$

(zie voor iets meer detail [13])

### §3.5. Bepaling van $j_p$ en $j'_p$

Laat  $R_i$  het  $i$ -de graads deel van  $R = \mathbb{C}[x,y]$  en  $H_i$  etc. analog.

We definiëren de Poincaré reeksen

$$P_p(T) = \sum_i \dim_{\mathbb{C}} (R_i \otimes E_p)^G \cdot T^i$$

en het polygoon

$$F_p(T) = \sum_i \dim_{\mathbb{C}} (H_i \otimes E_p)^G \cdot T^i$$

Het polygoon  $F_p(T)$  vertelt ons in welke graden de representatie  $p$  voorkomt (eigenlijk  $\bar{p}$ , maar  $F_p = F_{\bar{p}}$  zie [3]).

We hebben:  $P_p(T) = F_p(T) \cdot P(T)$ , met  $P(T)$  de Poincaré reeks van  $R^{G'}$  (indat  $R = H \otimes R^{G'}$ );  $P(T) = \frac{1}{(1-T^{n_1})(1-T^{n_2})}$

Omdat  $\dim(H_i \otimes E_p)^G = \geq d$ ,  $d = \deg(p)$  hebben we:

$$F_p(T) = \geq d.$$

We zetten  $F_p(T) = \sum_{i=1}^{\geq d} T^{q_i(p)}$   $q_i(p) \leq q_{i+1}(p)$ .

De  $q_i(p)$  heten de ' $p$ -exponenten'.

Duidelijk zal zijn:  $F_p(T) = 1 + T^m$  ( $m = \deg(p)$ );  $F_C(T) = T + \dots$ ?

Het blijkt mogelijk de  $F_p$  zonder veel rekenwerk in handen te krijgen.

Lemma: (T. Springer) Zij  $p_0 \in \text{Irr}(G)$ ;  $p_0 \neq 1$

en zij  $C \otimes p_0 = p_1 + \dots + p_e$

Dan:  $(\frac{1}{T} + T) F_p(T) = F_{p_1}(T) + F_{p_2}(T) + \dots + F_{p_e}(T)$

bewijs:  $\sum (R \otimes E_{p_i})^G = (R \otimes \sum E_{p_i})^G = (R \otimes R_1 \otimes E_0)^G$

Met de Clebsch-Gordan formule (zie [5])  $R_i \otimes R_1 = R_{i+1} \oplus R_{i-1}$  voor  $i \neq 0$  volgt nu:  $(\frac{1}{T} + T) F_{p_0}(T) = \sum F_{p_i}(T)$  en delen door  $P(T)$  levert het gestelde.  $\square$

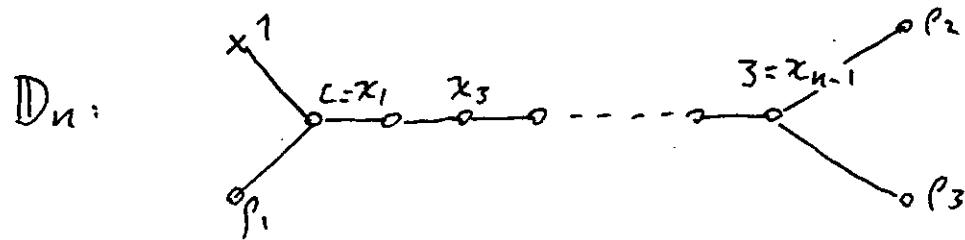
De Clebsch-Gordan formule toe passen d op  
 $(R \otimes R_1)^G$  vinden we voor  $P_C(T)$ :

$$P_C(T) = \left(T + \frac{1}{T}\right) P_{\rho_1}(T) - \frac{1}{T}$$

$$\text{en zo: } F_C(T) = T + T^{n_1-1} + T^{n_2-1} + T^{n-1}$$

Omdat we net een vol  $C \otimes \rho$  uit een valt (dat wordt juist door  $\Gamma_C(G)$  bepaald) kunnen we door langs het diagram te lopen de  $F_{\rho}(T)$  inductief bepalen.

We volstaan met het vermelden van het resultaat:

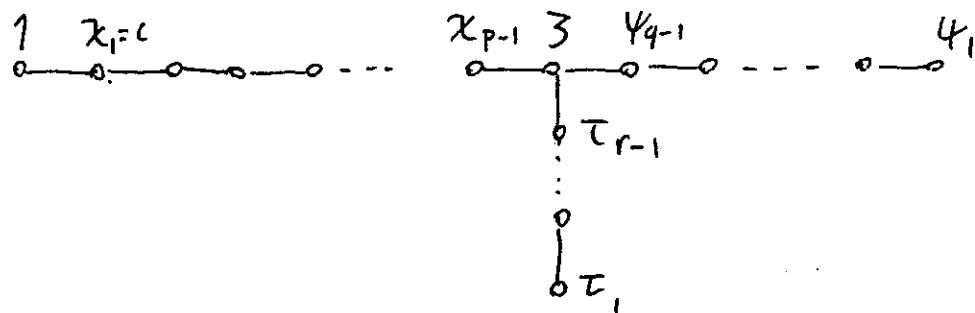


bij voorbeeld:  $c \otimes p_1 = c$ , dus  $\left(T + \frac{1}{T}\right) F_{p_1}(T) = T + T^3 + T^{2n-1} + T^{2n+2}$   
 $\Rightarrow F_{p_1}(T) = T^2 + T^{2n}$

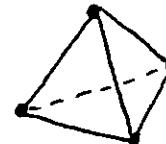
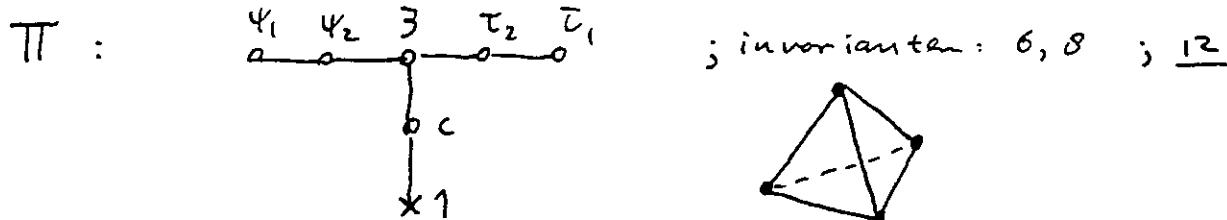
$$\text{En: } F_{x_i}(T) = T^i + T^{i+2} + T^{2n-i} + T^{2n+2-i}$$

$$F_{p_2}(T) = F_{p_3}(T) = T^n + T^{n+2}.$$

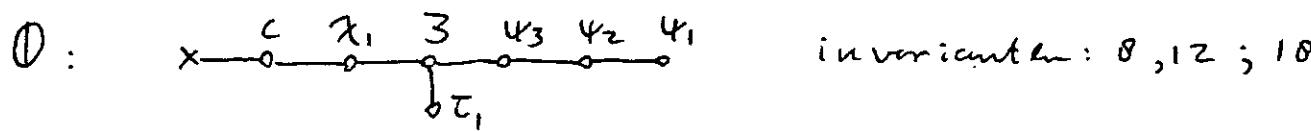
In de gevallen  $\text{II}$ ,  $\text{O}$  en  $\text{II}'$  heeft  $\Gamma_C(G)$  de vorm:



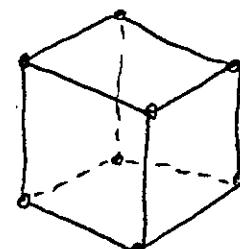
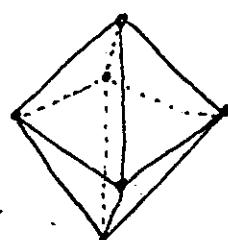
We vermeldden voor elk van de gevallen de  $\rho$ -exponenten (met enig gepruts kunnen we formules voor  $F_{x_i}$ ,  $F_{q_i}$  en  $F_{c_i}$  vinden; die reggen echter weinig).

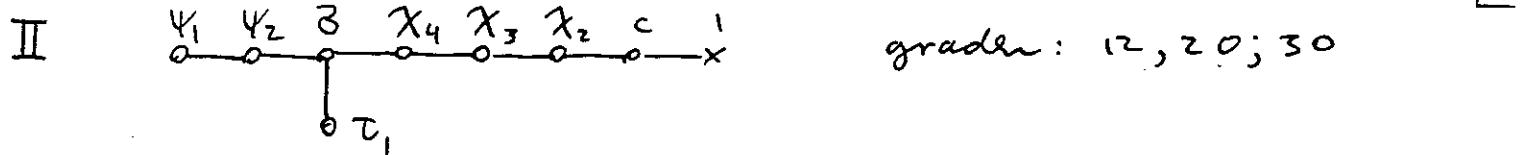


exponenten: $\psi_1$ :	4, 8	$q: 4$	$q': 8$
$\psi_2$ :	3, 5, 7, 9	8	10
3:	2, 4, 6, 6, 8, 10	12	12
$\tau_2$ :	3, 5, 7, 9	8	10
$\tau_1$ :	4, 8	4	8
c:	1, 5, 7, 11	6	8
1:	0	0	12



exponenten: 1:	0, 18	$q: 0$	$q': 18$
c:	1, 7, 11, 17	8	12
$\chi_2$ :	2, 6, 8, 10, 12, 16	16	18
3:	3, 5, 7, 9, 9, 11, 13, 15	24	24
$\psi_3$ :	4, 6, 8, 10, 12, 14	18	20
$\psi_2$ :	5, 7, 11, 13	12	16
$\psi_1$ :	6, 12	6	12
$\tau_1$ :	4, 8, 10, 14	12	14





graden: 12, 20; 30

exponenten 1:	0	30	$q: 0$	$q': 30$
$c:$	1 11 19 29		12 20	
$x_2:$	2 10 12 18 20 28		24	30
$x_3:$	3 9 11 13 17 19 21 27		36	40
$x_4:$	4 8 10 12 14 16 18 20, 22, 26		48	50
$3:$	5, 7, 9, 11, 13, 15, 15, 17, 19, 21, 23, 25		60	60
$\psi_2:$	6, 8, 12, 14, 16, 18, 22, 24		40	42
$\psi_1:$	7 13 17 23		20	24
$T_1:$	6 10 14 16 20 24		24	26

De oplettende lezer zal o.m. opgemerkt hebben dat:

i) De polynomen  $F_p(T)$  wederkerend zijn:

$$F_p(T) = T^m F_p\left(\frac{1}{T}\right)$$

ii) De exponenten  $q_i(p)$  voldoen aan:

$$q_i(p) \leq q_{i+1}(p)-2, \text{ behalve als } p=3 \text{ en } i=\frac{d}{2}-1$$

Dan n.l.:  $q_{\frac{d}{2}-1}(3) = q_{\frac{d}{2}+1}(3) \quad d = \deg g$

Eigenschap i) is heel algemeen waar: Laat  $G$  een eindige groep, verhoud op  $V$ ;  $\dim V=n$ . Met Molien's formule (zie [53]):

$$P_p(T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{\chi_p(g)}{\det(1-gT)} \quad \text{waaruit volgt:}$$

$$P_p\left(\frac{1}{T}\right) = (-1)^n P_{\bar{p}, 0}(T) \quad \text{met } \bar{p}_g = \det(g_T)^{-1}$$

Wanneer  $\theta_1, \dots, \theta_n$  een H.S.O.P voor  $\mathbb{R}^G$  is en

$$F_p(T) := P_p(T) \cdot \prod_{i=1}^n (1 - T^{n_i}) \quad n_i = \deg(\theta_i)$$

en  $F_1(T) = \sum_{i=1}^t T^{d_i}$ , dan volgt:

$$F_p(T) = T^{dt} \cdot F_{\bar{P}, \sigma}(\frac{1}{T}).$$

Als  $G \subset SL(V)$  en bijvoorbeeld  $p = \bar{p}$  dan staat er:

$$F_p(T) = T^{dt} \cdot F_p(\frac{1}{T})$$

De graden van  $j_p$  en  $j'_p$  volgen nu door het optellen van de exponenten:

$$q(p) := \deg(j_p) = \sum_{i=1}^d q_i(p)$$

$$q'(p) := \deg(j'_p) = \deg(j_p) + q \deg(p)_{+1}(p) - q \deg(p)^{(p)}.$$

Dere getallen zijn vermeld in de rechter kolom op de laatste 2 pagina's.

Het is niet moeilijk om te bewijzen dat:

Lemma: Laat  $p \in Irr(G)$  op een tak  $t$  van lengte  $a$  in  $\Gamma_C(G)$  liggen, en zij  $\delta(p)$  de afstand tot het centrale punt  $z$ . Dan: i)  $q(p) = \frac{a - \delta(p)}{2a} \cdot |G|$ ; ii)  $q'(p) = q(p) + 2\delta(p)$

bewijs: zie [13].

Laat nu  $O$  een speciale boom op  $P(V)$  en  $1 \leq k \leq \frac{1}{2} \frac{|G|}{|O|}$  en zij  $f_k$  de binaire vorm die met orde  $k$  op  $O$  verduikt (dus  $\deg f_k = k \cdot |O|$ ). Laat  $z \in O$  en  $l$  de lineaire vorm die in  $z$  verduikt,  $A(l)$  de vorm die in het anti-podale punt van  $z$  verduikt is. Zij weer  $s = |G_z|$ , de orde van de stabilisator  $G_z$  van  $z$ .

140

en laat  $f_2 := f_1 \cdot \sum_{\ell \in G} \left[ \frac{A(\ell)^{s-k}}{\ell^k} \right]^\delta$  (op juiste manier te verstaan).

$$W(O, k) = \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

$f_1$  en  $f_2$  zijn twee semi-invarianten, transformeerd volgens hetzelfde karakter, net als  $j_p$  en  $j'_p$ .

We hebben dan ook:

propositie: Voor  $\rho \in \text{Irr}(G)$ ,  $\rho \neq 1$  is de ruimte

$$W(\rho) = \langle j_p, j'_p \rangle_{\mathbb{C}}$$
 gelijk aan  $W(O, k)$  voor elke  $O$  en  $k$ .

De afbeelding  $\rho \mapsto W(\rho) \xrightarrow{\cong} W(O, k) \hookrightarrow e(O, k)$  realiseert het isomorfisme van diagrammen.

bewijz: Als we een maal weten dat  $\dim_{\mathbb{C}} W(\rho) = 2$  dan is dit niet moeilijk. De graden  $q(\rho), q'(\rho)$  en de karakters  $\det \bar{\rho}$  bepalen unieke semi-invarianten.

Voor details zie [13].

Als we nu kunnen laten zien dat voor generische  $f \in W(O, k)$  de strikt getransformeerde  $C_f$  in  $\tilde{X}$  de exceptionele divisor slechts één maal  $e(O, k)$  transversaal snijdt, dan is de stelling uit § 3.2 bewezen.

Dit kan door de divisor  $f = 0$  te vergelijken met de krommen  $\ell(z, k)$  uit § 3.4.

Voor de duidelijkheid nogmaals:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{x} & \\ & \downarrow & \\ L & \xrightarrow{q} & QL \\ \downarrow & \cdot & \downarrow \\ V & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

De strikt getransformeerde  $C_f$  van  $P(\{f=0\}) \subset X$  is hetzelfde als de strikt getransformeerde van  $q(C'_f) \subset QL$  met  $C'_f$  de strikt getransformeerde van  $f=0$  in  $L$ .

Laat nu  $f \in W(O, k)$  generiek,  $f = f_2 - \mu f_1$

Als  $z \in P(V) \subset L$  en  $z \neq 0$  dan is de functie  $\frac{f_2}{f_1}$  op  $V'$  holomorf en  $\neq 0$  in  $z$ , dus voor genoeglijke  $\mu$  hebben we  $z \notin C'_f$ , dus  $C_f$  snijdt geen divisor en boven  $q(z)$ .

Als  $z \in O$ , lies dan coördinaten in  $V$  met  $z = (0:1)$

Een kromme  $C \in \ell(z, k')$  heeft de vorm:

$$C: z_1 x^{k_1} - z_2 y^{s-k'} = 0 \quad \text{met } s = 1 \text{ of } |z|$$

De rationale functie  $\frac{f_2}{f_1}$  heeft de vorm:

$$\frac{f_2}{f_1} = a \frac{x^k}{y^{s-k}} + \sum \frac{g_i}{n_i} \quad a \neq 0, \deg g_i = k, \deg n_i = s-k$$

en  $n_i(z) \neq 0$

Als  $k \neq k'$  als nadert  $\frac{f_2}{f_1}$  tot en of oneindig vanneer we naar 0 lopen volgens een tak van  $C \in \ell(z, k')$ , dus  $C_f \cap \ell(z, k') = \emptyset$

Als  $k = k' \quad (k \neq \frac{s}{2})$  dan nadert  $f_2/f_1$  tot  $\pm \frac{z_1}{z_2}$  langs  $C \in \ell(z, k)$ . Hieruit kan men concluderen dat  $C_f \in \ell(z, k)$  precies in één punt snijdt. Op soortgelijke wijze kan men de rest van de beweringen van de stelling vergaan.

□

Dit is in het kort wat ik van de constructies van H. Lénorser begrijp.

### III. De kromme van Klein.

In dit hoofdstuk zal een begin gemaakt worden met een poging om de stand van zaken uit II § 2-3 te generaliseren naar andere singulariteiten van drie helling-type. Hoewel deze singulariteiten niet meer rationaal zijn, is de constructie van deze singulariteiten (zie I § ) conceptueel zo sterk gelijk aan die van de simpele, dat dit op zijn minst de moeite van het proberen waard is. In § 1 zullen we de constructie uit II § 3. interpreteren in termen van quasi homogene singulariteiten om de strategie van generaliseren motiveren. In § 2 worden kort de modulaire krommen besproken, terwijl § 3 iets over theta karakteristieken bevat. In § 4 wordt de tensordecompositie in  $SL_2(\mathbb{P})$  bepaald. § 5 bevat iets van de rijke meetkunde rond  $SL_2(7)$  en de kromme van Klein. In § 6. wordt de decompositie van  $R = \bigoplus H^0(\mathcal{C}, \mathcal{L}^k)$  (met  $\mathcal{C}$  de kromme van Klein en  $\mathcal{L}$  de invariante theta karakteristiek) als  $SL_2(7)$ -moduln bepaald. § 7 bevat en hele slot opmerkingen.

### §1. Normale quasi-homogene oppervlakken.

In I §5 is al vermeld dat elke normale 2-dimensionale singulariteit met goede  $\mathbb{C}^*$ -actie voor geseld kan worden als  $X = \text{Spec}(\oplus H^0(\mathcal{E}, \mathcal{L}^k)^G)$ . Hierbij moet men weer het volgende diagram voor ogen houden:

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{X} & \\
 \downarrow & & \downarrow E_0 \\
 L \longrightarrow GL & \quad \quad \quad \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} & \quad \quad \quad \{Q_i\} \longrightarrow P_i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 CL \longrightarrow X & \quad \quad \quad \circ \longleftarrow \circ & 
 \end{array}$$

Hierin is:  $L$  een projectieve kromme over  $\mathbb{C}$ ,  $\mathcal{L}$  een ample lijrbundel op  $L$ ;  $L = \text{Tot}(\mathcal{L}^\vee)$ ;  $G$  een groep van bundel automorfismen;  $CL = \text{Spec}(\oplus H^0(L, \mathcal{L}^k))$ ;  $X = \text{Spec}(\oplus H^0(L, \mathcal{L}^k)^G)$ ; verticale pijlen contracties en horizontale 'uit delen naar  $G$ '.  $\tilde{X}$  de minimaal goede resolutie van  $X$ , die ontstaat door de cyclische quotiënt singulariteiten van  $GL$  in  $P_i$  op te lossen;  $E_0$  de centrale kromme. Voor een simpele singulariteit hebben we:  $L = \text{Tot}(\mathcal{O}(-1))$ ,  $\mathcal{L} = \mathbb{P}^1$ ;  $CL = \text{Spec} \oplus H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(k)) \simeq \mathbb{C}^2$  en  $G$  een binair groep, en in II § bekijken we secties  $s_1, \dots, s_d$  in  $(R \otimes E_p)^G$  en vormden  $j_p = s_1 s_2 \dots s_d$   $d = \deg(p)$ . Als semiinvARIANT levert dit een divisor op  $X$  en de strikt getransformeerden in  $\tilde{X}$  sneden de exceptionele divisor

op een opmerkelijke wijze.

Niets staat ons in de weg om voor een willekeurige Q.H.-singulariteit geschikte secties in  $(R \otimes E_p)^G$  te kiezen, met nu  $R := \bigoplus_k H^0(L, \omega^k)$  en de corresponderende divisoren op  $\tilde{X}$  te bestuderen.

Nu moet men bedenken dat de voorstelling van  $X$  als banen i.h.a. wre van uniek is, en we zullen keuzen voor  $L, G$  en  $t$  moeten maken. Voor de driehoeksingulariteit van type  $(n, 3, 2)$  hebben we een natuurlijk model met  $L = Y(n)$ , de modulaire kromme en  $G = PSL_2(n)$ . (§2).

Een quasi-homogeen normale oppervlakte singulariteit heeft een natuurlijke compactificatie als  $\text{Proj}(A[t]) = \bar{X}$  met  $A = \bigoplus H^0(L, \mathcal{F}^k)^G$  en  $t$  een onbekende van gericrt 1.

Dit komt weer op het terugbrengen van 1 punt in oneindig voor elke  $\mathbb{C}^*$ -baan. We hebben dan  $\bar{X} - X =: E_\infty \cong \mathcal{E}$ , de centrale kromme.  $\bar{X}$  heeft langs  $E_\infty$  voor elk punt  $\bar{P}_i \in E_\infty$  corresponderend met de  $P_i \in E_\infty$  een duale cyclische quotient singulariteit (vervang de iede coördinaat in  $L$  door z'n inverse etc.). Voor een driehoeksingulariteit van type  $p, q, r$  dus gevone  $A_{p-1}, A_{q-1}, A_{r-1}$  singulariteiten.

Losken we ook deze op dan ontstaat precies een  $T_{p,q,r}$  diagram in het oneindige (in het hyperbolische geval) op  $\tilde{X}$ .

De groep  $SL_2(\mathbb{P})$  priem heeft  $p+3$  niet triviale irreducibele representaties; gelijk aan het aantal punten in de  $T_{p,3,2}$ -graaf. Is het misschien mogelijk dat

de divisoren van  $j_p$ -polynomen  $p \in \text{Irr}(SL_2(\mathbb{P}))$ ,  $p \neq 1$

zijn er eindig krommen snijden op soortgelijke wijze als  
in II §3? We zullen dan wel eerst de groep  $SL_2(\mathbb{P})$  i.p.v.  
 $PSL_2(\mathbb{P})$  efficiënt op een bord moet en kunnen. Maar  
dit was precies ook de situatie bij de simpele singulari-  
teiten: de 2-woudige overdekking van de driehoeksgroep,  
dus de binaire groep heeft gewoon irreducibele representaties.

## §2. Modulaire krommen.

Laat  $H$  het bovenhalf vlak  $\subset \mathbb{C}$ ;  $H = \{x+iy \mid y > 0\}$   
Men kan eenvoudig na dat  $\text{Aut}(H) = PSL_2(\mathbb{R})$ , de  
(geprojectiviseerde) groep van reële  $2 \times 2$ -matrices en  
determinant 1. (zie ook I §3). Een element  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  werkt  
op de gebruikelijke wijze via gebroken lineaire transformaties  
op  $H$ :  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$ . De groep  $\Gamma(1) := PSL_2(\mathbb{Z})$  werkt  
als basis transformaties op  $H$ , opgevat als ruimte van  
ruosters  $N = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ ,  $i \in H$ . Het quotient  $H/\Gamma(1) \cong \mathbb{C}$   
classificeert elliptische krommen. Sinds Klein bekijkt  
men ook (o.a.) de z.g. hoofdcongruentie ondergroepen  $\Gamma(N)$ :  
 $\Gamma(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z}) \mid \left( \begin{smallmatrix} ab \\ cd \end{smallmatrix} \right) \equiv \left( \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \pmod N \right\}$ .

We krijgen een exactie rij:  $0 \rightarrow \Gamma(N) \rightarrow \Gamma(1) \rightarrow PSL_2(N) \rightarrow 0$   
en een vertakte overdekking  $H/\Gamma(N) \rightarrow H/\Gamma(1) = \mathbb{C}$   
met groep  $PSL_2(N)$  als overdekkingstransformaties. De  
(niet compacte) krommen  $H/\Gamma(N)$  classificeren we  
elliptische krommen, samen met een basis voor de

groep van  $N^2$   $N$ -torsiepunten. Via de overdekkingstransformaties werkt  $PSL_2(N)$  als basis transformaties. Men kan de krommen  $H/\Gamma(N)$  op 'canonische' wijze, door vervanging van eindig veel punten (de z.g. cusps) compactificeren tot gladde krommen  $Y(N)$ , de z.g. modulaire krommen.  $Y(1) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$ . De afbeelding  $Y(N) \rightarrow Y(1) = \mathbb{P}^1$  vertaalt boven 3 punten met index 2, 3, 4! in  $Y(N)$  wordt overdekt door 2. #  $PSL_2(N)$  driehoeken met hoeken  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  en  $\frac{\pi}{n}$ . Voor  $n=2, 3, 4, 5$  krijgen we de overdekkingen van  $\mathbb{P}^1$  met 12, 24, 48 en 120 driehoeken terug (zie I §) met groepen  $\mathbb{D}_3 = \sum (3, 2, 2)$ ,  $\mathbb{T} = \sum (3, 3, 2)$ ,  $\mathbb{Q} = \sum (4, 3, 2)$ ,  $\mathbb{I} = \sum (5, 3, 2)$  respectieelijke.

Zij nu  $N=p$ ,  $p$  priem. De groep  $PSL_2(p)$  heeft, zoals men eenvoudig na rekent  $\frac{1}{2}(p^2-1)p$  elementen. ( $p \neq 2$ )

De vertaking  $Y(p) \rightarrow \mathbb{P}^1$  ziet er uit als

$$\frac{1}{4}(p^2-1)p \left\{ \begin{array}{c} x^2 \\ x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} *^3 \\ *^6 \\ \vdots \\ *^p \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{1}{2}(p^2-1) \end{array} \right\}$$

Met Ramanujan-Hurwitz volgt nu dat het geslacht van de modulaire kromme  $Y(p)$  is:  $g_p = \frac{(p+1)(p-1)(p-6)}{24} + 1$

Dus inderdaad  $g_3 = 0$ ;  $g_5 = 0$  en  $g_7 = 3$ ,  $g_{11} = 26$  etc.

De kromme  $Y(7)$  van geslacht 3 noemen we de kromme van Klein  $\mathcal{K}$ . (zie [ ]) Op  $\mathcal{K}$  werkt de groep  $PSL_2(7)$  als automorfismen.  $PSL_2(7)$

is de beroemde simple groep van orde 168, (exceptioneel) isomorf met  $SL_3(2)$ , de groep van automorfismen van het projectieve vlak over  $\mathbb{F}_2$  (zie [1]).

Laat  $\mathcal{R}$  de canonische lijnbundel op  $\mathcal{Y}(N)$  (dus de canoniëke bundel). We zien dat  $\text{Spec} \left( \bigoplus_k H^0(\mathcal{Y}(N), \mathcal{R}^{\otimes k})^{PSL_2(N)} \right)$  een goed model is voor de driehoekssingulariteit van type  $(n, 3, 2)$ . Als we iets met representaties van  $SL_2(p)$  willen doen dan zullen we  $\mathcal{R}$  moeten vervangen door een andere bundel, waar  $SL_2(p)$  effectief op werkt. Op de basis moet  $SL_2(p)$  als  $PSL_2(p)$  blijven zitten. (We moeten er natuurlijk wel voor zorgen dat de singulariteit niet verandert.)

### §3. Theta-karakteristieken.

We gaan hier zeer kort in op de theorie der theta-karakteristieken; wortels uit de canonische bundel. (Ik weet hier weinig van, het meeste nog via gesprekken met B.v. Geemen, zie ook [20] en [21].)

Laat  $\mathcal{C}$  een gladde, projectieve kromme over  $\mathbb{C}$ , en  $\mathcal{J}(\mathcal{C})_{\mathbb{Z}}$  de  $\mathbb{Z}$ -torsiepunten van de jacobidam van  $\mathcal{C}$ , natuurlijk isomorf met  $H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)^{2g}$   $g$  gesteldt van  $\mathcal{C}$ .

Een lijnbundel  $\mathcal{L}$  heet een theta-karakteristiek als  $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} = \mathcal{R}$ , met  $\mathcal{R}$  de canonische bundel op  $\mathcal{C}$ .

Laat  $S(\mathcal{C})$  de verzameling van theta-karakteristieken op  $\mathcal{C}$ .

Als  $\alpha \in J(\ell)_2$  en  $\beta \in S(\ell)$  dan ook  $\beta \otimes \alpha \in S(\ell)$

Als  $\beta, m \in S(\ell)$  dan  $\beta \otimes m' \in J(\ell)_2$ .

Hieruit volgt dat de groep  $J(\ell)_2$  effectief en transitief op  $S(\ell)$  werkt, dus  $\# S(\ell) = 2^{2g}$ .

Aan een  $\beta \in S(\ell)$  voegen we een kwadratische vorm  $Q_\beta$  op  $J(\ell)_2$  toe:

$$Q_\beta : J(\ell)_2 \rightarrow \mathbb{Z}/2; Q_\beta(\alpha) = \dim(H^0(\ell, \beta) \oplus H^0(\ell, \beta \otimes \alpha)) \bmod 2$$

Laat  $\varepsilon : J(\ell)_2 \times J(\ell)_2 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ ;  $(\alpha, \beta) \mapsto \varepsilon(\alpha, \beta)$

het snijproduct, waarbij we  $\alpha$  en  $\beta$  opvatzen als elementen in  $H_1(\ell, \mathbb{Z}/2)$ .

Dan hebben we:

Lemma: i)  $Q_{\beta \otimes \alpha}(\beta) = Q_\beta(\beta) + \varepsilon(\alpha, \beta)$

ii)  $Q_\beta(\alpha \otimes \beta) = Q_\beta(\alpha) + Q_\beta(\beta) + \varepsilon(\alpha, \beta)$

iii)  $\beta \mapsto Q_\beta$  is een bijectie tussen theta-

karakteristieken en kwadratische vormen die aan ii) voldoen.

bewijs: zie [20].

Wanneer we een symplectische basis  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  voor  $J(\ell)_2$  kiezen dan ziet een  $Q$  met eigenschap ii) er uit als

$$Q(x) = \sum_{i=1}^g \varepsilon_i \beta_i + \sum_{i=1}^g \varepsilon'_i \alpha_i + \sum_{i=1}^g \beta_i \alpha_i \quad \text{met } x = \sum \beta_i \alpha_i + \sum \alpha_i \beta_i$$

De klassieke notatie voor zo'n theta-karakteristiek is dan volgt:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_g \\ \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 & \cdots & \varepsilon'_g \end{bmatrix} \quad \text{met } \varepsilon_i, \varepsilon'_i = 0 \text{ of } 1.$$

Een theta-karakteristiek  $\beta$  heet even resp. oneven als  $\dim H^0(\ell, \beta)$  dat is. Er geldt:

$\beta$  even :  $\sum \varepsilon_i \cdot \varepsilon'_i$  even

$\beta$  oneven :  $\sum \varepsilon_i \cdot \varepsilon'_i$  oneven

(Dit is precies de Arf invariant van  $Q_\beta$ )

Er zijn  $z^{\theta-1}(z^\theta + 1)$  even en  $z^{\theta-1}(z^\theta - 1)$  oneven theta karakteristieken. De punten van  $Q_{\ell=0}$  zijn precies de punten waarop we  $\mathcal{L}$  kan verschuiven zonder dat het type, d.w.z. even of oneven, verandert.

Wanneer we een kromme  $\mathcal{L}$  met  $G \subset \text{Aut}(\mathcal{L})$  hebben en we willen een extensie  $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 0$  op een theta-karakteristiek laten werken dan zullen we op z'n minst een  $G$ -invariante kwadratikle met eigenschap ii) op  $H, (\mathcal{L}, \mathbb{Z}/2)$  moeten hebben.

Het is een kleine wonder dat dit voor de modulaire krommen  $Y(P)$  en  $G = PSL_2(P)$  lukt ( tenminste: als ik mij niet vreselijk vergis.)

propositie: Er is een theta-karakteristiek  $\mathcal{L}$  op  $Y(P)$  waar  $SL_2(P)$  effectief op werkt;  $\mathcal{L}/\mathbb{Z}/2 = \mathcal{R}$  waarbij  $\mathbb{Z}/2$  het centrum van  $SL_2(P)$  is.

bewijs: Laat  $\mathcal{R}_H$  de coraanbundel aan  $H$ ; Dus topologische  $\mathcal{R}_H = H \times \mathbb{C}$ , met  $PSL_2(\mathbb{R})$  actie:

$$\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} (z, dz) = \left( \frac{az+b}{cz+d}, \frac{1}{cz+d} z \cdot dz \right)$$

Laat  $\sqrt{\mathcal{R}_H}$  de  $SL_2(\mathbb{R})$  bundel  $H \times \mathbb{C}$  met actie:

$$\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} (z, \sqrt{dz}) = \left( \frac{az+b}{cz+d}, \frac{1}{cz+d} \sqrt{dz} \right)$$

Merk op:  $\sqrt{\mathcal{R}_H}^{\otimes 2} = \mathcal{R}_H$  en  $\sqrt{\mathcal{R}_H}/\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathcal{R}_H$ , en  $SL_2(\mathbb{R})$  werkt gewoon als  $PSL_2(\mathbb{R})$  op de basis  $H$ .

Beschouw:  $0 \rightarrow \Gamma(P) \rightarrow \Gamma(I) \rightarrow PSL_2(P) \rightarrow 0$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow \beta & & & \uparrow & \\ & & \ker \varphi & \longrightarrow & SL_2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi} & SL_2(P) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & & & \\ & & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2 & & \end{array}$$

kerk werkt op  $\sqrt{SL_H}$  wij en op de basis als  $\Gamma(P)$ .

Het quotient is na compactificatie de (totale ruimte van) de gewraagde theta karakteristiek  $L$  op  $Y(P)$   $\blacksquare$

Een andere manier om dit te zien is direct naar de driehoeks-groepen te kijken. We hebben  $Y(P) = H/N$  en

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & N & \longrightarrow & \Sigma & \longrightarrow & PSL_2(P) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \tilde{N} & \longrightarrow & \tilde{\Sigma} & \xrightarrow{\varphi} & SL_2(P) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/2 & & \end{array}$$

Hierin is  $\Sigma$  de uitgebreide driehoeks groep  $\subset \widetilde{\text{Aut}(H)}$  (zie I § ) en  $\widetilde{\text{Aut}(H)}$  werkt op de universele overdekking  $F := H \times \mathbb{C}$  van  $H \times \mathbb{C}^* = \mathcal{R}_H^*$ . Uit delen van  $F$  naar  $\tilde{N}$   $\subset \widetilde{\text{Aut}(H)}$  levert nu het complement van de nulsecrede van (de totale ruimte van) een lijnbundel  $L$  op  $H/N = Y(P)$ . Voor  $\varphi$  kan men nemen:  $x \mapsto -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $z \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (zie [4]). Het element  $d = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  werkt triviale op de basis van  $L$ , maar in de vercls als  $x \mapsto -x$ .

Gevolg:  $\dim H^0(Y, L^{2k+1})^{SL_2(P)} = 0$

Zij immers  $s$  een sectie in  $L^{2k+1}$ , dan

$d s(x) = -s(x)$ , dus als  $s \in H^0(Y, L^{2k+1})^{SL_2(P)}$  volgt  $s(x) = 0$ .  $\blacksquare$

Een ander model voor de driehoeks singulariteit van type  $(P, 3, 2)$  is dus  $\text{Spec}(\oplus H^0(Y(P), L^k)^{SL_2(P)})$ . Merk op dat slechts de gradering van de ring veranderd is.

## §4. Irreducibele karakters van $SL_2(\mathbb{P})$ .

F. Klein ontdekt, door de modulaire kromme m.b.v 'Theta-Nullwerte' in te bedden (zie [22]) de laagst dimensionale representatie van  $(\mathbb{P})SL_2(\mathbb{P})$ , in dimensie  $\frac{p-1}{2}$ . Frobenius vindt, als een van de eerste toepassingen van karaktertheorie, de karakter tabel van  $SL_2(\mathbb{P})$ . We geven een summiere beschrijving van deze karakters gebaseerd op [23].

Laat nu verder  $p$  een priem getal  $> 2$ .

De groep  $SL_2(\mathbb{P})$  heeft  $p(p+1)(p-1)$  elementen en  $p+4$  conjugatieklassen. Representanten van deze klassen en aantal elementen in zo'n klasse vindt men in onderstaande tabel:

	1	-1	$a^l$	$b^m$	c	d	$-c$	$-d$
#	1	1	$p(p+1)$	$p(p-1)$	$\frac{1}{2}(p^2-1)$	$\frac{1}{2}(p^2-1)$	$\frac{1}{2}(p^2-1)$	$\frac{1}{2}(p^2-1)$

Hierin is  $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $-1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ;  $a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ ;  $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  met  $a$  wortelbrugger van  $\mathbb{F}_p^\times$ , en  $b$  een element van orde  $p+1$ , niet diagonaliseerbaar over  $\mathbb{F}_p$ .  $1 \leq l \leq \frac{p-3}{2}$ ;  $1 \leq m \leq \frac{p-1}{2}$ .

Net zoals er ruwweg 2 'reeksen' van conjugatie klassen zijn 2 series van irreducibele representaties.

De serie die 'bij'  $a$  hoort' verloopt hier als volgt:

Laat  $T = \langle a \rangle$  en  $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{F}_p \right\}$ ;  $B = TU$  is de

groep van boven driehoeksmatrices.  $T$  heeft  $p-1$  karakters

$$\chi_i(a^k) = \tau^{ik} \quad i=1, \dots, p-1; \quad \tau \text{ priemtieve } (p-1) \text{ eent. wortel.}$$

Door  $\chi_i$  uit te breiden tot  $B$  door  $\chi_i(x)=1 \quad x \in U$  te zetten en dan te induceren verkrijgen we  $p-1$  karakters

$\psi_i \quad i=1, \dots, p-1$ . De  $\psi_i \quad i=1, 2, \dots, \frac{p-3}{2}$  blijven irreducibel te zijn (van graad  $p+1$ ), terwijl  $\psi_0 = 1 + 4$  met  $4$  irreducibel (van graad  $p$ , het Steinberg karakter; dit is het permutatie karakter van de actie van  $SL_2(p)$  op de projectieve lijn over  $\mathbb{F}_p$ );  $\psi_{\frac{p-1}{2}} = \psi_+ + \psi_-$  met  $\psi_+$  irreducibel van graad  $\frac{p+1}{2}$ . Verder  $\psi_i = \psi_{-i}$  (reken met de index mod  $(p-1)$ )

De  $z^2$  reeks van karakters is  $\theta_i = \psi_i(4-1) - \phi_i$

$1 \leq i \leq \frac{p+1}{2}$  waarbij de  $\phi_i$  geïnduceerd zijn van de cyclische groep voortgebracht door  $b$ . Het blijkt:  $\theta_i \neq 0$

$\theta_i$  irreducibel van graad  $p-1$  voor  $i=1, \dots, \frac{p-1}{2}$  en

$\theta_{\frac{p+1}{2}} = \theta_+ + \theta_-$  met  $\theta_{\pm}$  irreducibel van graad  $\frac{p-1}{2}$

De bij behorende representaties zijn echter vrij lastig in handen te krijgen.

De karaktertafel is:

	$1$	$\psi$	$\psi_i$	$\psi_+$	$\psi_-$	$\theta_i$	$\theta_+$	$\theta_-$
$1$	$1$	$P$	$P+1$	$\frac{1}{2}(P+1)$	$\frac{1}{2}(P+1)$	$P-1$	$\frac{1}{2}(P-1)$	$\frac{1}{2}(P-1)$
$-1$	$1$	$P$	$(-1)^i(P+1)$	$\frac{1}{2}\varepsilon(P+1)$	$\frac{1}{2}\varepsilon(P+1)$	$(-1)^i(P-1)$	$-\frac{1}{2}\varepsilon(P-1)$	$-\frac{1}{2}\varepsilon(P-1)$
$a^l$	$1$	$1$	$\tau^{il} + \tau^{-il}$	$(-1)^l$	$(-1)^l$	$0$	$0$	$0$
$b^m$	$1$	$-1$	$0$	$0$	$0$	$-(\sigma^{im} + \bar{\sigma}^{im})$	$(-1)^{m+1}$	$(-1)^{m+1}$
$c$	$1$	$0$	$1$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{\varepsilon P})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{\varepsilon P})$	$-1$	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{\varepsilon P})$	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{\varepsilon P})$
$d$	$1$	$0$	$1$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{\varepsilon P})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{\varepsilon P})$	$-1$	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{\varepsilon P})$	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{\varepsilon P})$

$$\text{met } \varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Het berekenen van de tensor decompositie is volstrekt recht toe recht aan.

In essentie is het resultaat heel eenvoudig.

We breiden de notatie wat uit:  $\theta_0 = 4 - 1$  en we zetten  $\theta_i = \theta_{-i}$  (indices voor de  $\theta$ 's mod  $p+1$ ).

resultaat: Laat  $\langle \phi \chi \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \chi(g) \psi(g)$ . Dan:

$$\langle 3_i 3_j 3_k \rangle = D_{ijk}$$

$$\langle 3_i 3_j \theta_k \rangle = C_{ijk}$$

$$\langle 3_i \theta_j \theta_k \rangle = C_{ijk}$$

$$\langle \theta_i \theta_j \theta_k \rangle = E_{ijk}$$

$$D_{ijk} = \delta_{i+j+k} + \delta_{i+j-k} + \delta_{i-j+k} + \delta_{i-j-k} + (1 + (-1)^{i+j+k})$$

$$C_{ijk} = 1 + (-1)^{i+j+k}$$

$$E_{ijk} = -(\delta_{i+j+k} + \delta_{i+j-k} + \delta_{i-j+k} + \delta_{i-j-k}) + (1 + (-1)^{i+j+k})$$

(n.b: bij de  $D$  functie: indices mod  $p-1$ ; bij  $E$  mod  $p+1$ ).

Het probleem is om ook de uitdrukkingen  $\langle \psi \theta^+ 3^- \rangle$  etc. te berekenen. Dit is wat lastiger; in Appendix II is het complete resultaat vermeld. M.b.v. deze formules is het nu een eenvoudig om tensor producten in  $SL_2(p)$  te berekenen. Tabellen voor de matrices  $A^\chi$  (zie II § ) vindt men eveneens in Appendix II.

§ 5.

## De meetkunde van $PSL_2(7)$ .

In deze § vertellen we iets over de prachtige meetkunde geassocieerd met  $\ell := Y(7)$  en de simpele groep van orde 168,  $PSL_2(7)$ . Voor details en expliciete berekeningen zij de lezer verwijzen naar het oorspronkelijke artikel van Klein [20].

§ 5.1 De 168-bladige overdekking  $\ell \rightarrow \mathbb{P}^1$  vertakt boven 3 punten; 0, 1 en  $\infty$  met index 3, 2 en 7 resp. Het Riemann-oppervlak  $\ell$  wordt bedekt door  $2 \times 168$  driehoeken met hoeken  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$  en  $\frac{\pi}{7}$  (zie omslag: de identificaties langs de randen zijn een beetje lastig te begrijpen.)

De actie van  $PSL_2(7)$  op  $\ell$  heeft 3 speciale banen:

24 punten (type a) boven  $\infty$ ;  $\text{Stab}(a) = \mathbb{Z}/7$ .

56 punten (type b) boven 0;  $\text{Stab}(b) = \mathbb{Z}/3$ .

84 punten (type c) boven 1;  $\text{Stab}(c) = \mathbb{Z}/2$ .

Omdat  $\ell$  niet hyperelliptisch is ( $PSL_2(7)$  heeft geen 2-dimensionale (niet triviale) representaties!) wordt  $\ell$ , zoals elke niet-hyperelliptische kromme van geslacht 3, door zijn canoniek lineair systeem ingebeld als een vlakke kromme van graad 4, en  $PSL_2(7)$  werkt dan via zijn 3 dimensionale representatie op  $\mathbb{P}^2$  en heeft de vgl. van  $\ell$  als 4<sup>e</sup> graads invariant.

Nu heeft elke  $4^2$  graads kromme 24 buigpunten, 28 bitangentialen en 84 sextactische punten. Omdat bij transformatie buigpunten in buigpunten overgaan etc, volgt nu dat de punten uit buan a de buig punten zijn, die uit buan b de punten waar de bitangentialen en buan c de sextactische punten bevatten.

§ 5.2. Het is recht toe recht aan om nu te gaan dat  $PSL_2(7)$  de volgende elementen en ondergroepen bevat, zie [20]:

Elementen: 1 element van orde 1

21	elementen	2 ; 1 conjugatie klasse
56	"	3 ; 1
48	"	7 ; 2
42	"	4 ; 1

ondergroepen: (21 geconjugeerde  $\mathbb{Z}/2$ 's, 28 geconjugeerde  $\mathbb{Z}/3$ 's, 21 geconjugeerde  $\mathbb{Z}/4$ 's, 8 geconjugeerde  $\mathbb{Z}/7$ 's.)

plus: 14  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$  twee klassen van 7

28  $S_3$  allen geconjugeerd; =  $\text{Nor}(\mathbb{Z}/3)$   
en  $\mathbb{Z}/2$  zit in 4  $S_3$ 's.

21  $D_4 = D_4$  allen geconjugeerd =  $\text{Nor}(\mathbb{Z}/2)$

8  $G_{21}$  (niet abels) allen geconjugeerd =  $\text{Nor}(\mathbb{Z}/7)$   
elke  $\mathbb{Z}/3$  zit in 2 rullen.

14  $\emptyset = S_4$  twee klassen van 7.

14  $\Pi = A_4$  " " "

Hieruit volgen tal van interessante meetkundige feiten:

i) Omdat de stabilisator van een sextatisch punt  $\mathbb{Z}/2$  is en omdat er 84 sextachten zijn en maar 21  $\mathbb{Z}/2$ 's volgt dat een  $\mathbb{Z}/2$  4 sextachten op hem plaats houdt.

Omdat een projectieve transformatie van orde 2 een perspectiviteit is hebben we dat de 21 assen van deze perspectiviteiten deze 84 punten uitsnijden. Het product van deze 21 assen levert een invariant van graad 21.

ii) Omdat  $\ell$  van graad 4 is, snijdt de raaklijn in een buigpunt de kromme in ~~een~~ nog een ander punt, noodzakelijk weer een buigpunt van  $\ell$  ( $\neq$  het oorspronkelijke). Nu is de stabilisator van een buigpunt een  $\mathbb{Z}/7$ , waar er 8 van zijn, terwijl er 24 buigpunten waren. Dit betekent dat een  $\mathbb{Z}/7$  precies 3 buigpunten vast houdt. Het gevolg is dat een keten van buigpunt-raaklijn-buigpunt---na 3 stappen sluit; de 24 buigpunten vallen uit een in 8 buigpunts driehoeken. Door een buigpunts driehoek als coördinatassen te nemen vindt Klein snel een vergelijking voor  $\ell$ :  $x^3y + y^3z + z^3x = 0$ .  
(Voor een andere manier om deze invariant van graad 4 te vinden zie [5]).

iii) Klein laat zien dat elke octahedrale ondergroep  $\mathcal{Q}$  een hegelsnede invariant heeft die  $\ell$  in 8 bitangentspunten snijdt. Het product van 7 van zulke hegelsneden geeft een invariant van graad 14 die alle

bitangents punten uitsnijdt.

De hessiaan van graad 6 die de buigpunten uitsnijdt is een invariant die we kunnen toevoegen om een volledig systeem van invarianten van  $PSL_2(7)$  te krijgen.

Samenvattend hebben we:

$\phi_4$  invariant van graad 4;  $\phi_4 = x^3y + y^3z + z^3x$

$\phi_6$  " " " 6; snijdt buigpunten uit.

$\phi_{14}$  " " " 14; snijdt bitangents punten uit.

$\phi_{21}$  " " " 21; snijdt sextacatische punten uit.

De ring van  $PSL_2(7)$ -invarianten wordt hier door voortgebracht en er is een unieke relatie van de vorm:

$$\phi_{21}^2 + \phi_{14}^3 + \phi_6^7 + \phi_4 \cdot F(\phi_6, \phi_{14}, \phi_{21}) = 0$$

(zie [5]).

De ring van de driehoeksingulariteit (2,3,7) was:

$$R = \bigoplus_k H^0(\ell, S\ell^k)^{PSL_2(7)}$$

Omdat  $\ell$  canonisch ingebed is, is  $H^0(\ell, S\ell^k) = \{\text{vormen van graad } k \text{ in } x, y, z\}$  modulo  $\{\text{vormen die op } \ell \text{ verdwijnen}\}$ . Dus  $R = ([\phi_6, \phi_{14}, \phi_{21}]/(\phi_{21}^2 + \phi_{14}^3 + \phi_6^7))$ .

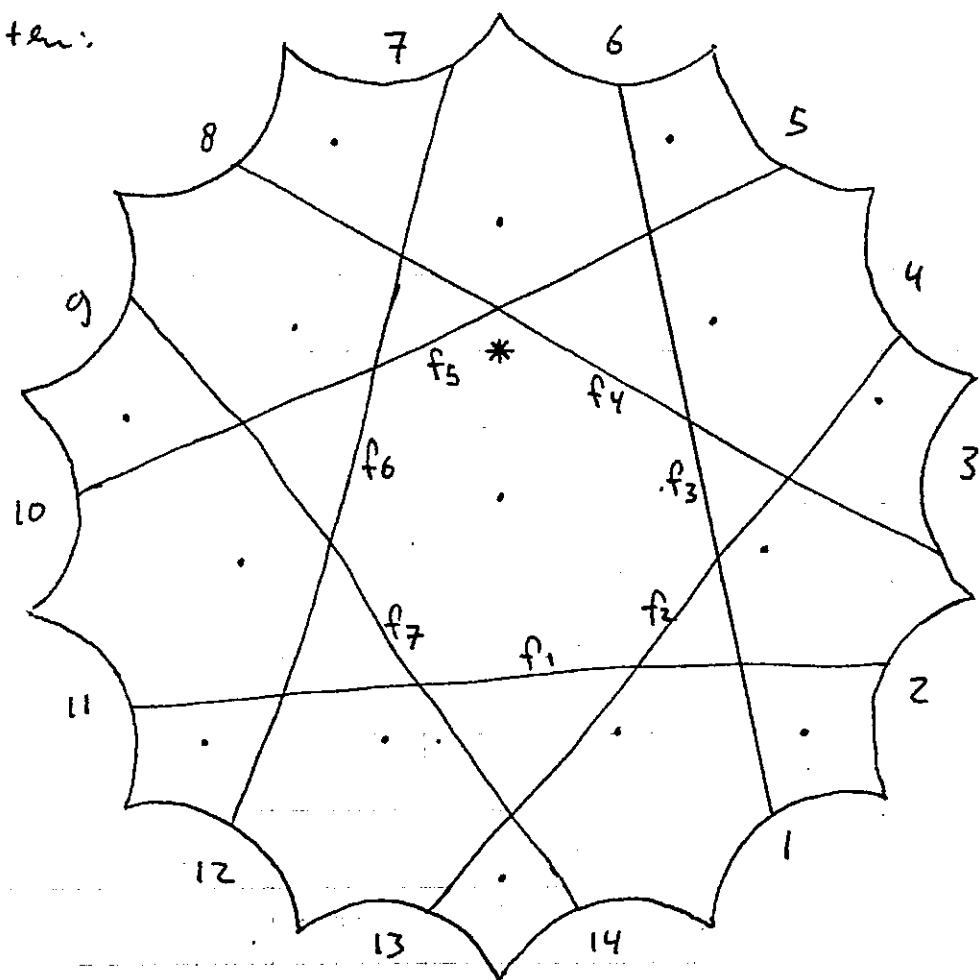
r is natuurlijk nog veel meer over de ondergroepen ( $\ell$  meetkundige configuraties die hier wel samen-  
valt en te vertellen. (Ik hoop hier later nog eens op  
te komen)

§ 5.3 In § hebben we gezien de  $\ell$  een invariante theta karakteristiek heeft. Tets wat merkwaardig gevolg bij klein ontbrekt is een behandeling van de actie van  $PSL_2(\mathbb{Z})$  op de theta karakteristieken.

$PSL_2(\mathbb{Z})$  werkt op  $H_1(\ell, \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)^6$  met behoud van de symplectische vorm; we krijgen dus een  $PSL_2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow Sp(6, \mathbb{Z})$ .  $Sp(6, \mathbb{Z})$  is de groep van symplectische  $6 \times 6$  matrices over  $\mathbb{Z}_2$ , isomorf met de Weyl groep van  $E_7$  modulo centrum.

We berekenen nu de actie van  $PSL_2(\mathbb{Z})$  op  $H_1(\ell, \mathbb{Z}/2)$  (en daarmee ook op de theta karakteristieken).

De 'Hampt figur' van klein vertoont daarbij goede diensten:



We beschouwen de elementen  $f_1, \dots, f_7 \in H_1(\ell, \mathbb{Z}/2)$

Duidelijk is: i) de  $f_i$  zijn voortbrengers  
ii)  $\sum f_i = 0$ .

De actie van een element van orde  $7 \in PSL_2(7)$  op deze cycli is duidelijk; draaiing om het middelpunt geeft  $f_i \rightarrow f_{i+1} \quad (i \bmod 7)$

De actie van het element van orde 2, rotatie om \* in de figuur is minder eenvoudig te zien; men moet zeer zorgvuldig op de identificaties letten.

Het resultaat is:

$$f_1 \mapsto f_1 + f_3 + f_6$$

$$f_2 \mapsto f_7 + f_3 \quad f_7 \mapsto f_2 + f_6$$

$$f_3 \mapsto f_6 \quad f_6 \mapsto f_3$$

$$f_4 \mapsto f_4 \quad f_5 \mapsto f_5$$

Laat  $x, y, z \in PSL_2(7)$  die voldoen aan  $x^7 = y^3 = z^2 = xyz = 1$

Dan  $y = x^{-1}z$ , dus m.b.v. de actie van  $x$  en  $z$  kunnen we ook de actie van een element van orde 3.

Een matrix van de vorm  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \beta & B \end{pmatrix}$  is symplectisch  $\Leftrightarrow A^{-1T} = B$ , zoals men snel na reken.

Het element  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{Z})$  heeft orde 7 en

$A^{-1T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . We zoeken nu een symplectische basis  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ; \beta_1, \beta_2, \beta_3$  z.d.d. het element van orde 7 in  $PSL_2(7)$  voor gesteld wordt door  $[(A), (A^{-1T})]$  (notatie:  $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \beta & B \end{pmatrix} = [A, B]$ ).

- Door uit te schrijven blijkt dan dat er op permutatie der  $\alpha$ 's en  $\beta$ 's maar een mogelijke keuze is:
- $\alpha_1 = g_1 + g_4 + g_5 + g_6 \quad \beta_1 = g_2 + g_4 + g_5 + g_6$
- $\alpha_2 = g_1 + g_2 + g_6 \quad \beta_2 = g_1 + g_2 + g_3 + g_6$
- $\alpha_3 = g_3 + g_5 + g_6 \quad \beta_3 = g_3 + g_4 + g_6$

met  $g_i = f_i + f_{i+1}$ .

Het wonderlijke is nu dat t.o.v. deze basis van de elementen  $\gamma$  (en  $\tau$ ) in blokform uitschrijven:

$$\gamma \mapsto \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\tau \mapsto \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\gamma \mapsto \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

M.a.w. in de natuurlijke representatie van  $PSL_2(7)$  op  $H_1(\ell, \mathbb{Z}/2)$  komt  $PSL_2(7)$  diagonaal in de vorm van  $SL_3(2)$  in  $Sp(6,2)$  te liggen.

De kromme  $\ell$  heeft  $2^{2,3} = 64$  theta karakteristieken; 36 even en 28 oneven (die corresponderen met de 28 bitangenten; de twee raakpunten van een bitangente geven een divisor  $P+Q$  met  $\tau(P+Q) = k$ ,  $k$  casuistische divisor).

Door na te rekenen vindt men:

propositie: Onder de actie van  $PSL_2(7)$  vallen de theta karakteristieken in de volgende banen uit:

I.  $\left[ \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right]$ ; II.  $\left\langle \left[ \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] \right\rangle$ ; III.  $\left\langle \left[ \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] \right\rangle$ ; IV.  $\left\langle \left[ \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] \right\rangle$  (even)  
en  $\left\langle \left[ \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] \right\rangle$  (oneven).

De lengtes van de banen zijn: 1, 7, 7, 21; 28.

Er is dus blijkbaar een unieke invariante theta-

- karakteristiek, d.w.z. voor de karakteristiek uit § 5 hadden we geen andere keuze. Of dit voor  $p > 7$  ook zo is, is onduidelijk.

## § 6. Poincaré reeksen.

- In deze § bepalen we de Poincaré reeksen
- $Q_p(T) := \sum_k \dim_{\mathbb{F}} (H^0(\ell, \mathcal{L}^k) \otimes E_p)^G T^k \quad G = SL_2(\mathbb{Z})$
- met  $\ell = Y(7)$  en  $\mathcal{L}$  de invariante theta-karakteristiek, voor elke irreducibele representatie  $p$  van  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

- $SL_2(\mathbb{Z})$  heeft 11 irreducibele representaties (zie § 4).
- Die geven we dan met:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 4 & 3_1 & 3_2 & 3_+ & 3_- & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_+ & \theta_- \\ \hline \text{graad} & 1 & 7 & 8 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 3 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{aarde in } -1 & 1 & 7 & -8 & 8 & -4 & -4 & -6 & 6 & -6 & 3 & 3 \end{array}$$

- De karakters 1, 4,  $3_2$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_+$  en  $\theta_-$  zijn trivial op de kern van  $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{Z})$ , dus zijn in feite karakters van  $PSL_2(\mathbb{Z})$ .

### § 6.1 De even graden.

- Zoals al eerder gezegd is de kromme  $\ell$  canonisch in  $\mathbb{P}^2$  ingebed, waarop  $\mathrm{un}(P)SL_2(\mathbb{Z})$  via  $\theta_+$  werkt. De ring  $\bigoplus H^0(\ell, \mathcal{L}^{2k})$  kunnen we identificeren met de affiene ring van de kegel over  $\ell$ , ofwel  $R/\Phi_4$  met  $R = \mathbb{C}[x, y, z]$  en  $\Phi_4$  de vgl. van  $\ell$  in  $\mathbb{P}^2$

We berekenen daarom eerst:

$$P_p^*(T) := \sum \dim_{\mathbb{C}} (R_i \otimes E_p)^{PSL_2(\mathbb{Z})} \cdot T^i$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} P_p(T) &:= \sum \dim_{\mathbb{C}} (H^0(\mathcal{E}, \mathcal{L}^{2k}) \otimes E_p)^{PSL_2(\mathbb{Z})} T^k \\ &= P_p^*(T) \cdot (1 - T^4). \end{aligned}$$

De berekening van  $P_p^*$  kan men doen met Molien's formule. Er is echter een meer eenvoudige methode, die gebruik maakt van de representatiegraaf van  $\theta^+$ , net als in II §3.5.

propositie: Laat  $c$  een 3-dimensionale representatie van een eindige groep  $G$ , weergegeven via  $c$

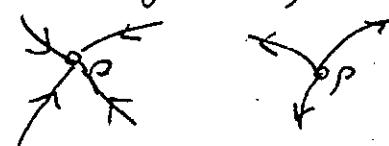
op  $V$ . Zij  $R = \text{Sym}(V)$  en  $P_p(T) = \sum \langle R_i | p \rangle T^i$

Stel dat  $1^2 c = \bar{c}$  en  $1^3 c = 1$  (zoals bij  $\theta^+$  het geval is.) Dan: voor  $p \neq 1$

$$P_p(T)(1 - T^3) = \sum a_{p|p} P_{p|}(T) T - \sum a_{p|p} P_{p|}(T) \cdot T^2$$

Hierin is  $a_{p|p}$  de decompositiematrix van  $c$ .

De eerste term aan de rechterzijde stelt de 'stroming naar  $p$  toe' en de tweede 'stroming van  $p$  af' in de representatiegraaf voor:



bewijs: (vgl. [12]). Als element in  $R(G)$  is de ring  $R$  gelijk aan  $\bigoplus \text{Sym}^k(c)$  en zet

$$\begin{aligned} [R](T) &= \bigoplus_k \text{Sym}^k(c) T^k \in R(G)[[T]] \\ &= (\sum A 1 + \sum (-1)^k T^k)^{-1} \end{aligned}$$

Verder  $[R] = \bigoplus_{p,i} \langle R_i | p \rangle_p \in R(G)$

$$\text{en } [R](T) = \bigoplus_{p,i} \langle R_i | p \rangle_p T^i \in R(G)[[T]] \\ = \sum_p p P_p(T).$$

Dit combineren geeft:  $1 = \sum_p P_p(T) \sum (-1)^k A^{1+k}(c) T^k$

Als  $c: G \hookrightarrow SU_2(\mathbb{C})$  dan  $A^0 c = 1; A^1 c = c; A^2 c = 1$ .

$(A = A^{1+})$  dus:  $1 = \sum_p p P_p(T) (1 - cT + T^2)$

In product rekenen met een  $p' \neq 1$  geeft dan:

$$0 = P_{p'}(T) \cdot (1 + T^2) - \sum_p \langle c \otimes p | p' \rangle P_p(T) \cdot T$$

Het is een weerhout op de formule die in II § 3.5 werd gebruikt.

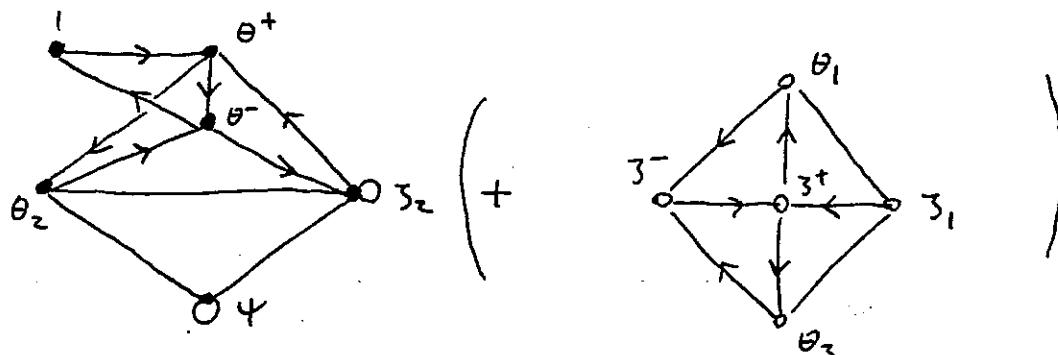
Als  $c: G \hookrightarrow SU_3(\mathbb{C})$  en  $A^2 c = \bar{c}$  dan komt er:

$$1 = \sum_p p P_p(T) (1 - cT + \bar{c}T^2 + T^3)$$

Het is een na wat manipulaties de bewerking geeft.



Bovenstaande formule kan weer gebruikt worden om langs de representatiegraaf lopend, relaties tussen de  $P_p^*$  te vinden. Die graaf ziet er als volgt uit:



Eerstelijks moet ik bekennen dat ik de  $P_p^*(T)$

eerst m.b.v. Molien's formule heb berekend, en  
daarna m.b.v. bovenstaande relaties gecontroleerd heb.

Ik vind voor de  $P_p^*(T)$ :

Resultaat:

$$P_1^*(T) = (1 + T^{21}) / (1 - T^4)(1 - T^6)(1 - T^{14})$$

$$P_4^*(T) = T^3 / (1 - T^2)(1 - T^3)(1 - T^4)$$

$$P_{3_2}^*(T) = T^4 / (1 - T)(1 - T^3)(1 - T^7)$$

$$P_{\Theta_2}^*(T) = T^2(1 + T^6) / (1 - T^2)(1 - T^4)(1 - T^7)$$

$$P_{\Theta_+}^*(T) = T(1 - T^2 + T^6) / (1 - T^2)(1 - T^4)(1 - T^7).$$

$$P_{\Theta_-}^*(T) = T^3(1 - T^4 + T^6) / (1 - T^2)(1 - T^4)(1 - T^7).$$

en de polynoom  $P_p(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{C}} (H^0(\ell, \mathcal{L}^{2k}) \otimes E_p)^G T^k$

ontstaan door  $P_p^*(T)$  met  $1 - T^4$  te vermenigvuldigen.

De karakteren die niet triviale op  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  zijn, verschijnen natuurlijk niet in de even graden, omdat daar effectief  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  werkt.

§ 6.2.

De oneven graden.

173

Kwammen in de even graden slechts de PSL-karakters voor, in de oneven graden is het net andersom:

$(H^0(\ell, \mathcal{L}^{2k+1}) \otimes E_p)^G = 0$  voor  $p=1, 4, 3_2, \theta_2, \theta^+, \theta^-$  om dezelfde reden dat  $H^0(\ell, \mathcal{L}^{2k+1})^G = 0$  ( $\S 3.$ ).

Het is niet direct duidelijk hoe we nu  $H^0(\ell, \mathcal{L}^{2k+1})$  in het algemeen bekent.

De eerste opmerking is dat  $H^0(\ell, \mathcal{L}) = 0$ . Tummers, als  $\mathcal{L}$  een sectie van ketten, dan was er een effectieve divisor van graad 2, zeg  $P+Q$ , met  $2(P+Q) = k$ , conische divisor. Dit betekent dat  $P$  en  $Q$  beiden gant punten zijn en die waren juist oneven, terwijl  $\mathcal{L}$  even is.

Klein geeft een basis voor  $H^0(\mathcal{L}^3)$  (Verder:  $H^0(\ell, \mathcal{L}^k) = H^0(\mathcal{L}^k)$ ) aan in de vorm van wortels uit 3<sup>e</sup> graad voor men die overal aan  $\ell$  raken:

$$A_0 = \sqrt{xyz}; A_1 = \sqrt{-y^3 - z^2x}; A_2 = \sqrt{-z^3 - x^2y}; A_3 = \sqrt{-x^3 - y^2z}.$$

We hebben een afbeelding  $H^0(\mathcal{L}^3)^{[2]} \rightarrow H^0(\mathcal{L}^6)$  ( $[k] = k^e$  symmetrische matrix). Men moet in de gaten houden dat tegens § 6.1 we de  $H^0(\mathcal{L}^{2k})$  als  $SL_2(7)$ -module kunnen), waarvan men snel na reken dat het een isomorfisme is:  $H^0(\mathcal{L}^3)^{[2]} \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{L}^6) = \theta_+^{[3]}$ .

Hieruit volgt:  $H^0(\mathcal{L}^3) \cong \mathfrak{J}_-$ .

Verder hebben we een hele hoop afbeeldingen

$$H^0(\mathcal{L}^k) \otimes H^0(\mathcal{L}^l) \rightarrow H^0(\mathcal{L}^{k+l})$$

die allemaal  $SL_2(7)$ -equivariant moeten zijn.

Door hier nu een beetje te gaan 'spelen' vindt men bij voorbeeld  $H^0(\mathbb{P}^5) = \mathbb{J}_1 ; H^0(\mathbb{P}^7) = \mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_+$

De berekeningen langs deze weg worden echter steeds moeilijker met het stijgen van de graad.

In een nog niet gepubliceerd artikel schrijft Catanese [23] voor een willekeurige lokale kromme (reg glad) en  $S$  een theta-karakteristiek, een exacte rij op van de vorm

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n-i)) \xrightarrow{A} \bigoplus_{i=1}^4 H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n-i)) \rightarrow H^0(S^{2n+1}) \rightarrow 0$$

in ons geval. (Tot mijn spijt moet ik benoemen dat ik er weinig van het artikel begrijp)

Gebaseerd op de berekening van  $H^0(\mathbb{P}^n)$  voor kleine waarden van  $n$  kom ik tot de volgende:

bewering: In ons geval is de rij

$$0 \rightarrow \mathbb{J}^+ \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n-2)) \rightarrow \mathbb{J}^- \otimes H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n-1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^{2n+1}) \rightarrow 0$$

$SL_2(7)$ -invariant exact.

Ondat ik Catanese's resultaat niet goed begrijp, besluit ik dit nog niet kunnen bewijzen. Dat het heel waarschijnlijk goed is blijkt uit het feit dat al mijn berekeningen blijven kloppen (en dat is een hele kunst).

Wie kan dit bewijzen? Misschien is het triviaal.

Als we aan nemen dat de bewering waar is (en ik wil dat risico wel nemen), dan kan men

d.m.v. deze exacte rij de poincaré reeks

$$\sum \dim_{\mathbb{C}} (H^0(\mathcal{L}^{2n+1}) \otimes E_{\bar{\rho}})^{SL_2(\mathbb{Z})} =: R_{\rho}(T) \text{ uit drukken}$$

in in § 6.1 uitgebreide reeksen.

Er komt dan:

$$R_{\rho}(T) = T \sum_x \langle \mathfrak{z}^- \otimes x | \rho \rangle P_x^*(T) - T^2 \sum_x \langle \mathfrak{z}^+ \otimes x | \rho \rangle P_x^*(T)$$

Merk op dat dit veel lijkt op de formule uit § 6.1.

### § 6.3 Tabel.

We zijn nu in de positie dat we de sectie ruimten  $H^0(\mathcal{L}^k)$  als  $SL_2(\mathbb{Z})$ -modul kunnen uitrekenen:

$H^0(\mathcal{L}^2) = \theta_4$	dim: 3	$H^0(\mathcal{L}^{10}) = 4 + \mathfrak{z}_2 + \theta_-$	dim: 18
$H^0(\mathcal{L}^3) = \mathfrak{z}_-$	4	$H^0(\mathcal{L}^{11}) = \mathfrak{z}_1 + \theta_+ + \theta_3$	20
$H^0(\mathcal{L}^4) = \theta_2$	6	$H^0(\mathcal{L}^{12}) = 1 + 4 + \mathfrak{z}_2 + \theta_2$	22
$H^0(\mathcal{L}^5) = \mathfrak{z}_1$	8	$H^0(\mathcal{L}^{13}) = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_- + \theta_1 + \theta_3$	24
$H^0(\mathcal{L}^6) = 4 + \theta_-$	10	$H^0(\mathcal{L}^{14}) = 4 + 2 \cdot \mathfrak{z}_2 + \theta_+$	26
$H^0(\mathcal{L}^7) = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_+$	12	$H^0(\mathcal{L}^{15}) = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}^+ + \mathfrak{z}^- + \theta_1 + \theta_3$	28
$H^0(\mathcal{L}^8) = \mathfrak{z}_2 + \theta_2$	14	$H^0(\mathcal{L}^{16}) = 4 + \mathfrak{z}_2 + 2 \theta_2 + \theta_4$	30
$H^0(\mathcal{L}^9) = \mathfrak{z}^+ + \theta_1 + \theta_3$	16	:	

(Uit Riemann-Roch volgt overigens direct:

$$\dim H^0(\mathcal{L}^k) = 2k - 2 \quad k \geq 3 \text{ en } H^0(\mathcal{L}^2) = 3 \quad )$$

§ 6.4. De g-exponenten.

176

Net als in II § bepalen we nu de exponenten van de irreducibele representaties, also de graden waarin deze voorkomen, overeenend modulo een parameter systeem, waarvoor we  $\{\phi_6, \phi_{14}\}$  nemen.

Het resultaat is:

representatie	exponenten.																
I	0	21															
4	3	5	6	7	8	9	10		11	12	13	14	15	16	18		
$\mathfrak{J}_2$	4	5	6	7	8	9	10		11	12	13	2.14	15	16	17		
$\theta_2$	2	4	6	8	9	10			11	12	13	15	17	19			
$\theta_+$	1	8	9						11	16	18						
$\theta_-$	3	5	10						12	13	20						
$\mathfrak{J}_1$	5	7	11	13	15	17	19	21		21	23	25	27	29	31	35	37
$\theta_1, \theta_3$	9	11	13	15	17	19			23	25	27	29	31	33			
$\mathfrak{J}_+$	7	9	15	21					23	25	29	39					
$\mathfrak{J}_-$	3	13	17	19					21	27	33	35					

Merk op dat we, om dezelfde reden als in II §, weer uiteraardende F polynomen hebben:  $T^{42} F_p(\frac{1}{T}) = F_{\bar{p}}(T)$

Nemen we weer secties in de laagste graden dan krijgen we j-polynomen van de volgende graden

I 4  $\mathfrak{J}_2$   $\theta_2$   $\theta_+$   $\theta_-$   $\mathfrak{J}_1$   $\theta_1$   $\theta_3$   $\mathfrak{J}_+$   $\mathfrak{J}_-$

$\deg j_p$ : 0 48 56 39 18 18 54 42 62 52

Elk van deze polynomen zou  $\neq 0$  kunnen zijn, d.w.z. er bestaan invarianten van de benoemde graden, die alleen  $\phi_4$  bevatten. Slechts in een hele grotendeels van de  $j$ , als  $\neq 0$ , door zijn graad ook bepaald worden.

Zolang we niet weten of deze polynomen  $\neq 0$  zijn of niet, is het zeer speculatief om iets te beweren over de ligging van de corresponderende divisoren op  $\tilde{X}$ .

### § 7. Slot opmerkingen.

We hebben in § 1 gezien dat we voor elke normale quasi-homogene oppervlakte singulariteit  $j$ -polynomen kunnen definiëren, waarvan we een voorstelling in de vorm  $\text{Spec}(\bigoplus H^0(\ell, \mathcal{L}^\ell)^G)$  hebben.

De uits, die in II § al werd uitgesproken, om criteria te vinden die garanderen dat  $j_P \neq 0$  wordt nu nog sterker gevuld. Het vervelende is dat dit naauwelijks in voorbeelden uit te rekenen is, in ieder geval niet door mij.

Voor  $SL_2(7)$  is het mogelijk te berekenen om de hele ring  $\bigoplus H^0(Y(7), \mathcal{L}^\ell)$  als  $SL_2(7)$ -modul in handen te krijgen. Of men met dezelfde methode ditzelfde kan bereiken voor  $\bigoplus H^0(Y(P), \mathcal{L}^\ell)$  is zeer twijfelaarig; men heeft waarschijnlijk meer intelligentie vereist met hielen nodig.

